

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

EDMILSON BERMUDEZ ROCHA JÚNIOR

ANÁLISE DA DINÂMICA ACOPLADA DE UMA MÁQUINA ELÉTRICA ROTATIVA
E SUA ESTRUTURA DE SUPORTE

VITÓRIA
2004



EDMILSON BERMUDES ROCHA JÚNIOR

**ANÁLISE DA DINÂMICA ACOPLADA DE UMA MÁQUINA ELÉTRICA ROTATIVA
E SUA ESTRUTURA DE SUPORTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na área de concentração Dinâmica.
Orientador: Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos.

**VITÓRIA
2004**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DA DINÂMICA ACOPLADA DE UMA MÁQUINA ELÉTRICA ROTATIVA
E SUA ESTRUTURA DE SUPORTE**

Edmilson Bermudes Rocha Júnior

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos - Orientador

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES



Prof. Dr. Domingos Sávio Lyrio Simonettii - Membro Interno

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES



Prof. Dr. José Manoel Balthazar - Membro Externo

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória(ES), 22 de dezembro de 2004.

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Rocha Júnior, Edmilson Bermudes, 1968-

R672a Análise da dinâmica acoplada de uma máquina elétrica rotativa
e sua estrutura de suporte / Edmilson Bermudes Rocha Júnior. –
2004.


69 f. : il.

Orientador: Márcio Coelho de Mattos.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Motores elétricos de corrente contínua. 2. Runge-Kutta,
Fórmulas de. 3. Lagrange, Equações de. I. Mattos, Márcio Coelho
de. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico.
III. Título.

CDU: 621



A Deus, pois Ele nunca desiste de mim!

Aos meus pais, Marli e Edmilson, pelo amor, apoio, paciência, dedicação e incentivo dados a mim ao longo da minha vida. Vencemos mais uma etapa!

AGRADECIMENTOS


Ao professor, orientador e amigo Márcio Coelho pela paciência, incentivo e disposição em orientar-me.

Ao professor Ângelo Gil Rangel pelos livros emprestados ao longo do trabalho.

As servidoras e amigas, Maria José (Zezé) e Celina pelas orações, palavras de incentivo e disposição em ajudar.

Ao colega Marcos Paulo Pinheiro na ajuda com as figuras.

Por fim, à minha família por ter me incentivado e dado todas as condições para que eu chegasse até aqui. Amo vocês!



“Entrega a tua vida a Deus, confia n’Ele e Ele tudo fará.”
(Salmos 37.5)

“Não sabes, não ouviste que o eterno Deus, o Senhor, o Criador dos confins da terra, não se cansa nem se fatiga? E inescrutável é o seu entendimento. Ele dá força ao cansado, e aumenta as forças ao que não tem nenhum vigor. Os jovens se cansarão e se fatigarão, e os mancebos cairão, mas os que esperam no Senhor renovarão as suas forças; subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; andarão, e não se fatigarão.” (Isaías 40.28-31)

RESUMO

Neste estudo é feita a análise da dinâmica de um sistema formado por um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado, sustentado por uma estrutura elástica. Este sistema é tratado como um sistema não-ideal, isto é, existe a interação entre o motor e a estrutura elástica. A importância do estudo de problemas envolvendo o acoplamento da dinâmica de diversos sistemas tem aumentado recentemente pelas características construtivas das máquinas e estruturas. Crê-se que a tendência é que as máquinas rotativas sejam mais flexíveis e devam operar em rotações mais altas. Assim, fenômenos que não eram observados em gerações anteriores de máquinas se fazem presentes e sua explicação exige a adoção de modelos mais completos. O conjunto de equações que governam o sistema em estudo “motor-estrutura” é composto pelas equações mecânicas obtidas a partir das equações de Lagrange e pela equação do motor obtida através da lei de tensão de Kirchhoff. Em seguida, utiliza-se o método de Runge-Kutta de quinta ordem, com passo variável, para a simulação numérica do sistema. Por fim, é feita a análise de rendimento do motor de corrente contínua, do tipo excitação independente e série, considerando a influência da estrutura sobre a sua rotação.

Palavras-chave: Motor elétrico de corrente contínua. Sistema não-ideal. Método de Runge-Kutta. Equações de Lagrange.

ABSTRACT

It's performed in this work the dynamics of the analyzes of a system made of a direct current electrical unbalanced engine, supported by an elastic structure. This kind of system is seen as an non-ideal system, that is, an interaction between the engine and the electrical system. The importance of the study of problems involving the docking of dynamics of various systems has increased through the constructive characteristics of the machines and its structures. It is believed that the constructive machines tend to be more flexible and may work in higher rotations as well. Then, some phenomena that were not noticed in other generation machines can be observed now and the use of a more complete models are necessary to explain it. On the operational side a bigger demand of the control system is made even more necessary. The set of equations that lead the system studied in this work *engine-structure* is composed by the mechanical equations resulted from the Lagrange equations and the ones from the Kirchhoff law tension. Moreover, the Runge-Kutta fifth order is used , with a variable pitch aiming at the simulation system. Finally, the analyzes of the electrical motor arousal independence and series performance is realized, taking into account the influence of the structure over the rotation.

Key words: Non-ideal system. Runge-Kutta method. Lagrange equations.

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| <u>TABELA 1 - Principais não linearidades encontradas no estudo de sistemas mecânicos.</u> | 14 |
| <u>TABELA 2 - Parâmetros para simulação do sistema não-ideal com $\sigma = 0$.</u> | 49 |
| <u>TABELA 3 - Parâmetros para simulação do sistema não-ideal com $\sigma \neq 0$.</u> | 53 |
| <u>TABELA 4 - Parâmetros para simulação do sistema não-ideal para motor cc de excitação série.</u> | 59 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| FIGURA 1 – Diagrama do motor de corrente contínua..... | 20 |
| FIGURA 2 – Diagrama do motor de corrente contínua de excitação independente. | 21 |
| FIGURA 3 – Diagrama do motor de corrente contínua de excitação série..... | 22 |
| FIGURA 4 – Motor cc suportado por uma estrutura elástica..... | 24 |
| FIGURA 5 – Diagrama de blocos do sistema não-ideal. | 48 |
| FIGURA 6 – Vibração do sistema não-ideal em função da rotação do motor..... | 49 |
| FIGURA 7 – Rendimento do sistema não-ideal em função do aumento da rotação do motor..... | 50 |
| FIGURA 8 – Rendimento do sistema não-ideal em função da diminuição da rotação do motor | 51 |
| FIGURA 9 – Razão entre os rendimentos não-ideal e ideal. | 52 |
| FIGURA 10 – Razão entre os rendimentos não-ideal e ideal. | 53 |
| FIGURA 11 – Amplitude de vibração com o aumento da rotação..... | 54 |
| FIGURA 12 – Amplitude de vibração com o decréscimo da rotação. | 55 |
| FIGURA 13 – Amplitude de vibração do sistema não-ideal..... | 56 |
| FIGURA 14 – Rendimento do sistema não-ideal com o aumento da rotação. | 57 |
| FIGURA 15 – Rendimento do sistema não-ideal com a diminuição da rotação..... | 57 |
| FIGURA 16 – Razão entre os rendimentos com o aumento da rotação. | 58 |
| FIGURA 17 – Razão entre os rendimentos com a diminuição da rotação. | 59 |
| FIGURA 18 – Vibração do sistema não-ideal em função da rotação do motor..... | 60 |
| FIGURA 19 – Rendimento do sistema não-ideal em função do aumento da rotação. | 61 |
| FIGURA 20 – Rendimento do sistema não-ideal em função da diminuição da rotação do motor. | 62 |
| FIGURA 21 – Razão dos Rendimentos para o motor cc com excitação série aumentando a rotação..... | 63 |
| FIGURA 22 – Razão dos Rendimentos para o motor cc com excitação série diminuindo a rotação. | 64 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------|---|
| CC ou cc : | corrente contínua. |
| e_b : | fonte de tensão ideal (tensão da armadura). |
| R_a : | resistência da armadura. |
| L_a : | Indutância da armadura. |
| R_f : | resistência de campo. |
| L_f : | indutância de campo. |
| J : | momento de inércia do rotor. |
| ω : | velocidade angular do motor. |
| f : | atrito viscoso. |
| $T_L(t)$: | torque de carga. |
| $T_M(t)$: | torque motor. |
| i_a : | corrente de amadura. |
| K_b : | constante de força contra-eletromotriz da máquina CC. |
| K_t : | constante de torque da máquina CC. |
| k : | rigidez total. |
| k_L : | rigidez linear. |
| k_{NL} : | rigidez não linear. |
| x : | coordenada de translação do deslocamento do motor. |
| θ : | coordenada de rotação do deslocamento do motor. |

| | |
|---|--|
| $m :$ | massa desbalanceadora fixada no eixo do motor. |
| $M :$ | massa do conjunto “motor-estrutura”. |
| $J :$ | momento de inércia do rotor. |
| $c :$ | amortecimento total. |
| $c_x :$ | amortecimento de translação. |
| $c_\theta :$ | amortecimento de rotação. |
| $r :$ | distância entre a massa desbalanceadora e o eixo do motor. |
| $z :$ | deslocamento adimensional. |
| $\tau :$ | tempo adimensional. |
| $\omega_0 :$ | freqüência natural do sistema. |
| $T_0 :$ | torque em estado estacionário. |
| $\overset{1}{\mathbf{v}} :$ | velocidade da massa desbalanceadora. |
| $\overset{1}{\mathbf{v}}_{estrutura} :$ | velocidade da estrutura elástica. |
| $\overset{1}{\mathbf{v}}_{rotor} :$ | velocidade do rotor. |
| $i\%$ | corrente adimensional. |
| $\vartheta\%$ | tensão adimensional. |
| $\eta :$ | rendimento. |
| $P_i :$ | potência de entrada. |
| $P_o :$ | potência de saída. |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|----|
| <u>1</u> | <u>INTRODUÇÃO</u> | 13 |
| <u>1.1</u> | <u>Motivação</u> | 13 |
| <u>1.2</u> | <u>Revisão bibliográfica</u> | 16 |
| <u>1.3</u> | <u>Organização do trabalho</u> | 18 |
| <u>2</u> | <u>FUNDAMENTOS DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA</u> | 19 |
| <u>2.1</u> | <u>Equações fundamentais</u> | 20 |
| <u>2.1.1</u> | <u>Motor de corrente contínua com excitação independente</u> | 20 |
| <u>2.1.2</u> | <u>Motor de corrente contínua com excitação série</u> | 22 |
| <u>3</u> | <u>MODELAGEM</u> | 24 |
| <u>3.1</u> | <u>Sistema ideal</u> | 25 |
| <u>3.1.1</u> | <u>Motor CC com excitação independente suportado por uma estrutura elástica</u> | 26 |
| <u>3.1.2</u> | <u>Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica</u> | 30 |
| <u>3.2</u> | <u>Sistema não-ideal</u> | 31 |
| <u>3.2.1</u> | <u>Equações da dinâmica do sistema</u> | 32 |
| <u>3.2.2</u> | <u>Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica</u> | 37 |
| <u>3.2.3</u> | <u>Rendimento</u> | 39 |
| <u>3.3</u> | <u>Equações de estado</u> | 40 |
| <u>3.3.1</u> | <u>Motor CC com excitação independente suportado por uma estrutura elástica</u> | 41 |
| <u>3.3.2</u> | <u>Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica</u> | 44 |
| <u>4</u> | <u>RESULTADOS</u> | 46 |
| <u>4.1</u> | <u>Motor CC de excitação independente suportado por uma estrutura flexível</u> | 46 |
| <u>4.2</u> | <u>Motor CC de excitação série suportado por uma estrutura flexível</u> | 59 |
| <u>5</u> | <u>CONCLUSÃO</u> | 65 |
| | <u>REFERÊNCIAS</u> | 67 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Do ponto de vista matemático, um sistema pode ser considerado como um operador pelo qual uma excitação $\mathbf{F(t)}$ é mapeada em uma resposta $\mathbf{X[F(t)]}$, onde $\mathbf{F(t)}$ é a entrada do sistema e $\mathbf{X[F(t)]}$ sua saída. Quanto à natureza da relação saída/entrada dos sistemas, estes são classificados em *lineares* e *não lineares*. Os sistemas lineares apresentam duas propriedades que simplificam muito seu estudo e estão expressas em sua relação saída/entrada, a saber:

- Princípio da superposição: $\mathbf{X[F_1(t) + F_2(t)] = X[F_1(t)] + X[F_2(t)]}$;
- Princípio da proporcionalidade: $\mathbf{X[\alpha F(t)] = \alpha X[F(t)]}$.

Já os sistemas não lineares não obedecem aos dois princípios anteriores, principalmente ao primeiro. Além disto, os sistemas não lineares podem ser sensíveis às condições iniciais do problema, desenvolvendo soluções topologicamente diferentes para mudanças naquelas condições.

Temos particular interesse em sistemas mecânicos e, mais precisamente, no estudo de vibrações mecânicas. Não é tarefa fácil encontrar sistemas vibrantes puramente lineares, conforme afirmam Schmidt & Tondl [Schmidt-86], embora importantes problemas de vibração possam ser tratados por modelos lineares.

O modelamento de um problema de vibração em um sistema mecânico conduz sempre, do ponto de vista das forças nele atuantes, a quatro parcelas:

- forças de excitação: fonte de energia para vibrar;
- forças restauradoras: provenientes da rigidez do sistema;
- forças amortecedoras: provenientes da dissipação de energia;
- forças de inércia: consequência das demais forças.

Não linearidades na força de excitação podem ocorrer em sistemas com vibrações auto-excitadas e paramétricas. As forças restauradoras de natureza não linear têm

sido tratadas na literatura, especialmente rigidezes lineares por intervalos (no deslocamento) e as forças que são funções polinomiais do deslocamento. As forças amortecedoras são em geral não lineares, embora o uso de um coeficiente de amortecimento constante seja comum nos modelos utilizados no estudo de vibrações mecânicas. Esta simplificação não implica em maiores problemas no caso de baixo amortecimento, isto é, quando as forças de amortecimento são de pequena magnitude quando comparadas às outras forças atuantes no sistema. No estudo de sistemas cujo amortecimento apresenta características não lineares destacam-se as equações de Van der Pol e sistemas amortecidos com atrito seco. De acordo Schmidt & Tondl [1] estudos muito específicos têm sido desenvolvidos para a análise de sistemas com auto-excitações e excitações paramétricas de natureza não linear. Em se tratando de rigidez e amortecimentos não lineares, a Tabela 1 apresenta um resumo das principais não linearidades tratadas com frequência no estudo das vibrações em sistemas mecânicos. Em se tratando de rigidez polinomial, o caso mais estudado refere-se ao oscilador de Duffing, que apresenta apenas o termo de grau 3.

TABELA 1
Principais não linearidades encontradas no estudo de sistemas mecânicos.

| | | |
|-------------------------------|--|-------------------------------|
| Força restauradora não linear | $x'' + ax' + \sum_{n=1}^N \mu_n x^n = f(t)$ | rigidez polinomial |
| | $x'' + ax' + b_1 x = f(t), \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2$ $x'' + ax + b_2 x = f(t), \quad x_1 > x > x_2$ | rigidez linear por intervalos |
| Amortecimento não linear | $x'' + (b - \delta x^2)x' + x = f(t)$ | Van Der Pol |
| | $x'' + cx' + kx + \mu(x')\text{Sgn}(x') = f(t)$ | atrito seco |
| | $x' + cx' x' + kx = f(t)$ | amortecimento quadrático |

A obtenção de um modelo que represente de maneira satisfatória um determinado problema de caráter não linear envolve a aplicação de teorias e técnicas de significativa complexidade, uma vez que não se encontra disponível um tratamento teórico completo e geral para problemas desta natureza, como no caso da teoria aplicada a sistemas lineares. Na última década surgiram algumas aplicações de

teorias como as de Volterra e Wiener, cuja utilização na análise de sistemas mecânicos é ainda recente e, um tanto restrita, uma vez que não se adéquam a uma classe importante de problemas nesta área, a de sistemas lineares por intervalos. Uma vez que os métodos têm, em grande parte, requerido funções analíticas para descrever os coeficientes das equações diferenciais que regem os problemas, sua aplicação a sistemas lineares por intervalos não tem sido possível.

Sistemas amortecidos com atrito seco estão exatamente nesta última condição. A complexidade será ainda maior se a função $\mu(x')$ (vide Tabela 1) não for uma função linear de seus parâmetros, pois o sistema, além de não ser regido por funções analíticas, perde a linearidade nos intervalos.

De acordo com Hilborn [2], a dinâmica não-linear está relacionada ao estudo de sistemas cujas equações de governo são não-lineares. Nesses sistemas, uma pequena mudança em um parâmetro pode provocar o aparecimento de mudanças repentinas e dramáticas (bifurcações) e o caos.

O nosso estudo trata particularmente de sistemas mecânicos e, mais precisamente, do estudo de vibrações mecânicas de um sistema composto por um motor elétrico e a sua estrutura de suporte. Conforme afirmam Schmidt & Tondl [1], encontrar sistemas vibrantes puramente lineares não é tarefa fácil.

O estudo de problemas envolvendo o acoplamento da dinâmica de diversos sistemas vem aumentando recentemente pela mudança gradativa das características construtivas das máquinas e estruturas. A tendência é que as máquinas rotativas tenham componentes mais flexíveis e devam operar em rotações mais altas. Assim, fenômenos que não eram observados em gerações anteriores de máquinas se fazem presentes e sua explicação exige a adoção de modelos mais completos.

Este trabalho analisa o comportamento dinâmico de um sistema *não ideal* formado por um motor de corrente contínua desbalanceado e uma base de sustentação flexível. De acordo com Nayfeh & Mook [3], a principal característica deste sistema é que a excitação pode sofrer influência da própria resposta dinâmica do sistema,

fazendo que haja o aparecimento de um fenômeno não linear conhecido como “fenômeno do salto”.

Dentre as configurações que o motor de corrente contínua pode assumir, este trabalho analisa dois tipos: motor cc com excitação independente e motor cc com excitação série. As diferenças entre estes tipos surge da maneira pela qual é feita a excitação do enrolamento de campo. Os motores de corrente contínua por serem máquinas altamente versáteis, são largamente utilizados em acionamentos à velocidade variável, e apresentam características muito particulares, como simplicidade de equacionamento, modelagem e controle relativamente simples. Elevados torques de partida, de aceleração e de desaceleração são fornecidos por este tipo de motor através das diferentes ligações entre o circuito de armadura e de campo.

Devido à sua versatilidade nas aplicações, o motor de corrente contínua possui uma grande parcela de aplicação do mercado de motores elétricos, destacando-se: as máquinas operatrizes em geral, bombas a pistão, torques de fricção, ferramentas de avanço, tornos, bobinadeiras, mandrilhadoras, máquinas de moagem, máquinas têxteis, guinchos e guindastes, pórticos, veículos de tração, prensas, máquinas de papel, indústria química e petroquímica, indústrias siderúrgicas, fornos, exaustores, separadores e esteiras para indústria cimenteira e outras.

A principal aplicação do motor cc está relacionada a situações em que deseja-se obter uma ampla variação de velocidade. Como exemplo, podemos citar os carros, caminhões, aviões, laminadores, robôs, locomotivas, guindastes, elevadores, ROV's e etc.

1.2 Revisão bibliográfica

No desenvolvimento de projetos relacionados a instalação de equipamentos rotativos, há a preocupação de limitar a valores adequados as amplitudes de vibração para a máquina, pessoas e equipamentos localizados em sua vizinhança.

Em sistemas dinâmicos compostos por estrutura e máquinas rotativas, verifica-se que o grande causador de vibração é o desbalanceamento das partes rotativas.

No estudo destes sistemas geralmente considera-se que o sistema é do tipo não-ideal isto é, a excitação é influenciada pela resposta do sistema. Quando a excitação não é influenciada pela resposta, dizemos que a excitação é ideal.

O primeiro registro relacionado ao estudo de problemas com fontes não ideais data de 1902, quando Sommerfeld realizou um experimento no qual observou interações entre um motor e a estrutura que o suportava, conforme descrito por Kononenko [4]. Através da variação de potência fornecida ao motor e com o monitoramento das frequências e amplitudes da resposta do sistema, observou-se regiões de instabilidade da rotação, para certos valores de potência, em regiões próximas à ressonância. Tal descontinuidade na frequência de rotação foi denominada de fenômeno de salto, ou então como é mais conhecido, efeito Sommerfeld. O fenômeno da interação de um sistema oscilatório com a sua fonte de excitação, sem analisar sua dependência com relação às propriedades do motor foi tratado em 1939 por Kalischuk, apud Kononenko(1969). Martyshkin, apud Kononenko (1969), mostrou de forma qualitativa que a ocorrência de oscilações instáveis de um sistema linear na região da ressonância estava relacionada as propriedades do motor elétrico. Nayfeh & Mook [3], discutiram o experimento realizado por Kononenko e Korablev, em 1959, e também compararam seus resultados experimentais com os resultados teóricos. Evan-Iwanowski [5] e Dimentberg *et al* [6] deram outras contribuições a este problema não ideal.

Balthazar *et al* [7] analisou as equações de governo de um problema não-ideal, contendo não linearidades quadráticas e cúbicas, para uma viga em balanço suportando uma fonte de energia não-ideal em sua extremidade livre. Balthazar *et al* [8], Balthazar *et al* [9] e Wieczorek & Mook [10] apresentaram alguns resultados experimentais deste problema. Simulações numéricas de uma dinâmica simplificada deste problema, usando um motor elétrico desbalanceado montado sobre um suporte não-linear com amortecimento interno e externo, impulsionado por uma fonte de energia não-ideal foram analisadas por Balthazar *et al* [11].

De Mattos *et al* [12] observou experimentalmente que o efeito Sommerfeld estava presente quando uma massa era conectada ao eixo de um motor de Corrente Contínua com potência limitada e este estava apoiado sobre uma estrutura elástica.

Atualmente, uma completa e compreensível revisão deste assunto, considerando o período 1904-1999, pode ser encontrada em Balthazar et al [13].

1.3 Organização do trabalho

Os capítulos que se seguem estão organizados da seguinte maneira.

No capítulo 2, é feita uma breve revisão das equações fundamentais do motor de corrente contínua considerando os diferentes tipos de excitação.

No capítulo 3, são apresentadas as características que definem um sistema como ideal e não-ideal. Através das equações de Lagrange e do conceito de variável de estado, são levantadas as equações que representam o sistema “motor de corrente contínua + estrutura flexível”, considerando-se as excitações independente e série.

No capítulo 4, são apresentados os resultados das simulações feitas através do MATLAB das equações de estado, seguidos das respectivas análises.

Por fim, no capítulo 5 são comparados os resultados obtidos no capítulo 4 com aqueles apresentados na literatura. Além disto, são feitas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Uma máquina elétrica é uma máquina capaz de converter energia mecânica em energia elétrica (gerador) ou energia elétrica em mecânica (motor). Quando se trata de um gerador, a rotação é suprida por uma fonte de energia mecânica como, por exemplo, uma queda d'água, para produzir o movimento relativo entre os condutores elétricos e o campo magnético e gerar, desse modo, uma tensão entre os terminais do condutor. No caso de motores, o funcionamento é inverso: energia elétrica é fornecida aos condutores e ao campo magnético (no caso de ele ser gerado por eletroímãs) para que surja a força magnética nos condutores, compondo um binário e causando a rotação (energia mecânica). Concluindo, sempre há movimento relativo entre condutor e campo magnético.

Há várias possibilidades de construção de máquina elétricas, que sempre são compostas por estator (parte estacionária) e rotor (parte girante). Algumas dessas possibilidades são:

- ✓ A máquina de corrente contínua (cc), que tem uma armadura rotativa e um campo estacionário.
- ✓ A máquina síncrona (ca) com uma armadura rotativa e um campo estacionário.
- ✓ A máquina síncrona (ca) com um campo rotativo e uma armadura fixa.
- ✓ A máquina assíncrona (ca), que possui ambos, enrolamento da armadura estacionários e rotativos.

A principal aplicação dos motores de corrente contínua está relacionada a situações em que deseja-se obter uma ampla variação de velocidade.

Uma ampla variedade de características velocidade-torque podem ser obtidas através das várias combinações dos circuitos de armadura e de campo.

A Figura 1 mostra o diagrama do motor de corrente contínua apresentado por Chapman [14].

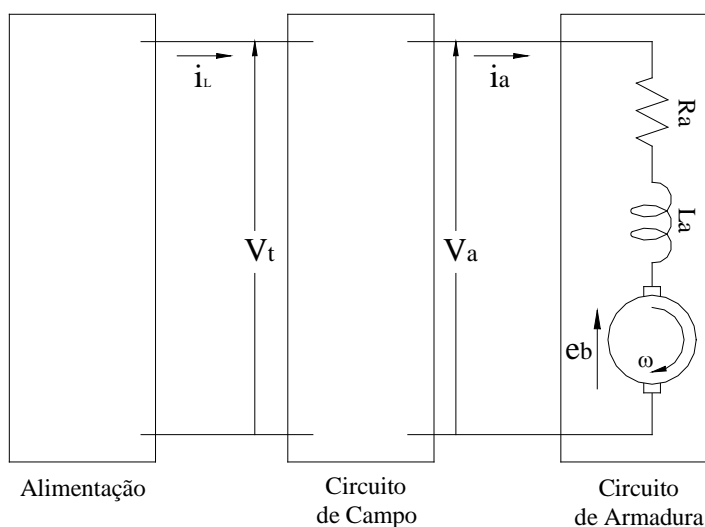


FIGURA 1 – Diagrama do motor de corrente contínua.

O circuito de armadura consiste de uma fonte de tensão ideal e_b em série com uma resistência R_a e com uma indutância L_a .

O circuito de campo é composto pela resistência R_f e pela indutância L_f .

2.1 Equações fundamentais

2.1.1 Motor de corrente contínua com excitação independente

O circuito equivalente do motor de corrente contínua, de excitação independente, é mostrado na Figura 2.

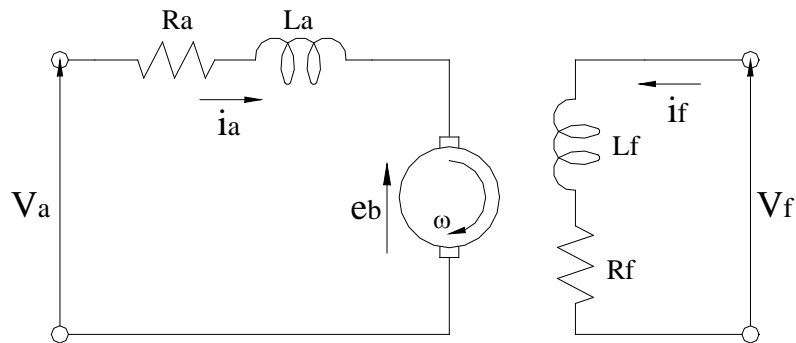


FIGURA 2 – Diagrama do motor de corrente contínua de excitação independente.

Aplicando-se a lei das tensões de Kirchhoff ao circuito da armadura, tem-se:

$$V_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (2.1)$$

Em seguida, utilizando a lei de Newton para o movimento rotacional, pode-se escrever:

$$T_M(t) = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + T_L(t) \quad (2.2)$$

onde J é o momento de inércia do (rotor), f é o atrito viscoso, $T_L(t)$ representa o torque de carga e o torque motor é denotado por $T_M(t)$.

As grandezas elétricas, e_b e i_a , e as grandezas mecânicas, T_M e ω , estão relacionadas através das seguintes equações:

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (2.3)$$

$$T_M(t) = K_t i_a \quad (2.4)$$

onde K_b e K_t denotam, respectivamente, as constantes de força contra-eletromotriz e de torque.

Substituindo a equação (2.3) na (2.1):

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = V_a(t) \quad (2.5)$$

Além disso, substituindo a equação (2.4) em (2.2) obtém-se:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + T_L(t) = K_t i_a \quad (2.6)$$

Definindo como estados a corrente de armadura $i_a(t)$ e a velocidade angular do motor $\omega(t)$, tem-se as seguintes equações de estado em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a(t) \\ T_L(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.2 Motor de corrente contínua com excitação série

A Figura 3 mostra o circuito equivalente do motor de corrente contínua de excitação série.

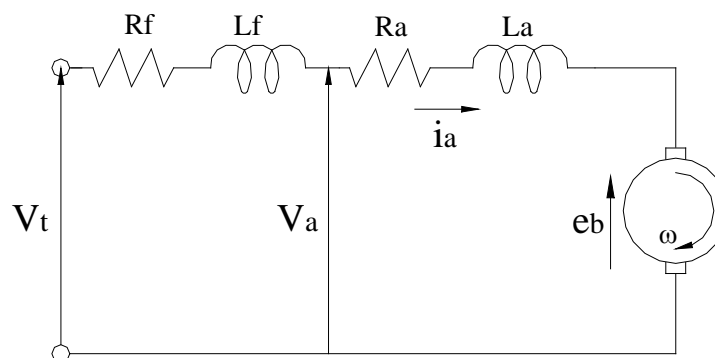


FIGURA 3 – Diagrama do motor de corrente contínua de excitação série.

A equação para o circuito de armadura é:

$$V_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (2.8)$$

O comportamento mecânico é descrito por:

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + T_L(t) = T_M(t) \quad (2.9)$$

As grandezas elétricas, e_b e i_a , e as grandezas mecânicas, T_M e ω , estão relacionadas através das seguintes equações:

$$e_b = K_b \omega i_a \quad (2.10)$$

$$T_M(t) = K_t i_a^2 \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.10) em (2.8) e a equação (2.11) em (2.9), obtém-se:

$$V_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \omega i_a \quad (2.12)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + T_L(t) = K_t i_a^2 \quad (2.13)$$

Em notação matricial, no domínio do tempo, as equações de estado podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ T_L \end{bmatrix} + \frac{K_t}{J} \cdot i_a^2 \quad (2.14)$$

3 MODELAGEM

Para sistemas mecânicos vibrantes, os modelos matemáticos típicos idealizam a excitação como uma função do tempo e independente da resposta que provoca. Esse tipo de sistema é chamado de sistema *ideal*.

Contudo, há outro tipo de modelo que descreve o sistema mecânico e a sua excitação, levando em conta as interações que existem entre os dois. Esse tipo de sistema é chamado de *não-ideal*.

Os sistemas não-ideais têm mais graus de liberdade do que o seu correspondente ideal e a solução produzida pelos modelos matemáticos relacionam a resposta com a excitação.

Sistemas eletromecânicos não ideais tipicamente consistem de um motor de potência limitada suportado por uma estrutura elástica conforme apresentado na Figura 4.

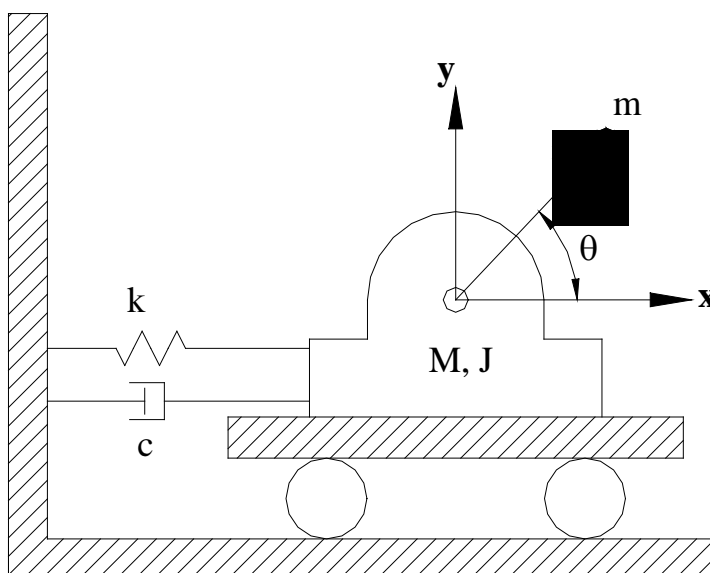


FIGURA 4 – Motor cc suportado por uma estrutura elástica.

Os parâmetros físicos apresentados na Figura 4 representam:

- $k = k_L + k_{NL}$;
- k_L e k_{NL} : elementos de rigidez linear e não linear, respectivamente;
- x e θ : coordenadas de translação e de rotação do deslocamento do motor;
- M , J e m : massa do conjunto “motor-estrutura” , momento de inércia do rotor e massa desbalanceadora, respectivamente;
- $c = c_x + c_\theta$;
- c_x e c_θ : elementos de amortecimento de translação e de rotação, respectivamente;
- r : distância entre a massa desbalanceadora e o eixo do motor.

Quando se deseja operar com o motor em velocidade superior à frequência natural da estrutura, o sistema deve passar pela ressonância para atingir a velocidade de operação desejada. Contudo, se o motor não tem potência suficiente, esta passagem pode não ser possível e o sistema pode ficar preso na ressonância com conseqüências indesejáveis. Para essa situação, a performance do sistema é menor do que a esperada. Ele requer mais potência e, conseqüentemente, o custo de operação é maior do que se estivesse operando nas condições de projeto.

3.1 Sistema ideal

Para descrevermos o comportamento dinâmico do sistema mostrado na Figura 4, considerando-o como ideal, necessitamos das equações de translação e de rotação do sistema. A velocidade de rotação do motor será considerada constante para que não haja influência nos demais movimentos do sistema.

3.1.1 Motor CC com excitação independente suportado por uma estrutura elástica

Fazendo o somatório das forças na direção Ox e considerando a rotação do motor constante, temos:

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + c_x \frac{dx}{dt} + k_L x + k_{NL} x^3 = mr \left(\frac{\theta}{t} \right)^2 \cos \left(\frac{\theta}{t} \right) \quad (3.1)$$

A equação (3.1) obedece o modelo apresentado na Tabela 1, para a situação em há a presença de força restauradora não linear e rigidez polinomial.

Para escrevermos a equação (3.1) na forma adimensional, primeiro definimos o deslocamento adimensional como $z = \frac{x}{r}$. Assim,

$$(M + m)r \frac{d^2 z}{dt^2} + c_x r \frac{dz}{dt} + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 = mr \left(\frac{\theta}{t} \right)^2 \cos \left(\frac{\theta}{t} \right) \quad (3.2)$$

$$(M + m)r z'' + c_x r z' + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 = mr \left(\frac{\theta}{t} \right)^2 \cos \left(\frac{\theta}{t} \right) \quad (3.3)$$

Agora, definindo o tempo adimensional como $\tau = \omega_0 t$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema, temos:

$$(M + m)r \omega_0^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} + c_x r \omega_0 \frac{dz}{d\tau} + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 = mr \left(\frac{\theta}{t} \right)^2 \cos \left(\frac{\theta}{t} \right) \quad (3.4)$$

$$(M + m)r \omega_0^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} + c_x r \omega_0 \frac{dz}{d\tau} + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 = mr \left(\frac{\theta}{t} \right)^2 \cos \left(\frac{\theta}{t} \right) \quad (3.5)$$

Dividindo a equação (3.5) por $(M + m)r\omega_0^2$, escrevemos:

$$\frac{c_x}{(M + m)\omega_0} + \frac{1}{(M + m)\omega_0^2} (k_L z + k_{NL} r^2 z^3) = \frac{m}{(M + m)} \left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 \cos(\ddot{\theta}) \quad (3.6)$$

Fazendo

$$2\zeta_x = \frac{c_x}{(M + m)\omega_0} \quad \sigma = \frac{k_{NL}}{k_L} r^2 \quad \mu = \frac{m}{M + m} \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{\theta}}{\omega_0} \quad (3.7)$$

Portanto, a equação (3.6) toma a seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta_x \ddot{\theta} + z + \sigma z^3 = \mu (\ddot{\theta})^2 \cos(\ddot{\theta}) \quad (3.8)$$

A teoria clássica de vibrações [15] aborda exhaustivamente os sistemas ideais. A amplitude de vibração foi obtida a partir de

$$z = \frac{\ddot{\theta}^2}{\sqrt{(1 - \ddot{\theta}^2)^2 + (2\zeta_x \ddot{\theta}^2)^2}} \quad (3.9)$$

Para a análise do movimento de rotação do sistema da Figura 4, escreveremos a seguinte equação de equilíbrio:

$$(J + mr^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + c_\theta \frac{d\theta}{dt} = T_M \quad (3.10)$$

$$(J + mr^2) \frac{d\theta'}{dt} + c_\theta \theta' = T_M \quad (3.11)$$

O torque gerado pelo motor, T_M , depende do tipo de excitação à qual o motor estará submetido.

Como apresentado na equação (2.4), o torque gerado pelo motor de corrente contínua com excitação independente é

$$T_M = K_t i_a \quad (3.12)$$

Assim, podemos reescrever a equação (3.11) como

$$\left(J + mr^2 \right) \frac{d\theta'}{dt} + c_\theta \theta' = K_t i_a \quad (3.13)$$

Para escrevermos a equação (3.13) na forma adimensional, primeiro utilizamos a velocidade angular adimensional $\theta\% = \frac{\theta'}{\omega_0}$. O resultado é:

$$\left(J + mr^2 \right) \frac{d(\omega_0 \theta\%)}{dt} + c_\theta \omega_0 \theta\% = K_t i_a \quad (3.14)$$

Sabemos que o tempo adimensional é dado por $\tau = \omega_0 t$. Logo, a equação (3.14) pode ser escrita como:

$$\left(J + mr^2 \right) \omega_0^2 \frac{d\theta\%}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta\% = K_t i_a \quad (3.15)$$

Além disto, definimos a corrente de armadura adimensional em termos da corrente em estado estacionário, i_0 , como $i\% = \frac{i_a}{i_0}$. A equação (3.15) toma a forma

$$\left(J + mr^2 \right) \omega_0^2 \frac{d\theta\%}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta\% = K_t i_0 i\% \quad (3.16)$$

Podemos escrever o torque em estado estacionário, T_0 , como:

$$T_0 = K_t i_0 = c_\theta \omega_0 \Rightarrow i_0 = \frac{c_\theta \omega_0}{K_t} \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.17) em (3.16)

$$(J + mr^2) \omega_0^2 \frac{d\theta}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta = c_\theta \omega_0 \theta \quad (3.18)$$

Dividindo a equação (3.18) por $(J + mr^2) \omega_0^2$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{c_\theta}{(J + mr^2) \omega_0} \theta = \frac{c_\theta}{(J + mr^2) \omega_0} \theta \quad (3.19)$$

Fazendo

$$2\zeta_\theta = \frac{c_\theta}{(J + mr^2) \omega_0} \quad (3.20)$$

Logo, a equação (3.10) toma a forma adimensional

$$\frac{d\theta}{d\tau} + 2\zeta_\theta \theta = 2\zeta_\theta \theta \quad (3.21)$$

Para a situação de estado estacionário, temos:

$$\theta = \theta \quad (3.22)$$

Portanto, o sistema ideal é representado pelas equações (3.8) e (3.22), ou seja:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\zeta_\theta \dot{\theta} + \theta = \mu(\theta)^2 \cos(\theta) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

3.1.2 Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica

A equação de translação adimensional para esta situação é a mesma do motor cc com excitação independente. Assim escrevemos

$$2\zeta_x \dot{z} + z + \sigma z^3 = \mu \cos(\theta) \quad (3.23)$$

onde

$$2\zeta_x = \frac{c_x}{(M+m)\omega_0} \quad \sigma = \frac{k_{NL}}{k_L} r^2 \quad \mu = \frac{m}{M+m} \quad \theta = \frac{\phi}{\omega_0} \quad (3.24)$$

Contudo, para escrevermos a equação de rotação devemos considerar que agora a excitação é série. Conforme a equação (2.11), o torque gerado pelo motor CC de excitação série é:

$$T_M(t) = K_{ts} i_a^2 \quad (3.25)$$

A equação (3.15) toma a seguinte forma:

$$(J + mr^2) \omega_0^2 \frac{d\theta}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta = K_{ts} i_a^2 \quad (3.26)$$

$$(J + mr^2) \omega_0^2 \frac{d\theta}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta = K_{ts} (i_0 l)^2 \quad (3.27)$$

O torque em estado estacionário, T_0 , para o motor de corrente contínua de excitação série é expresso por

$$T_0 = K_{ts} i_0^2 = c_\theta \omega_0 \Rightarrow i_0 = \sqrt{\frac{c_\theta \omega_0}{K_{ts}}} \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.28) em (3.27)

$$(J + mr^2) \omega_0^2 \frac{d\theta_0}{d\tau} + c_\theta \omega_0 \theta_0 = c_\theta \omega_0 (\theta_0^2) \quad (3.29)$$

Dividindo a equação (3.29) por $(J + mr^2) \omega_0$, temos:

$$\frac{d\theta_0}{d\tau} + \frac{c_\theta}{(J + mr^2) \omega_0} \theta_0 = \frac{c_\theta}{(J + mr^2) \omega_0} (\theta_0^2) \quad (3.30)$$

Portanto, a forma adimensional da equação (3.26) é

$$\frac{d\theta_0}{d\tau} + 2\zeta_\theta \theta_0 = 2\zeta_\theta \theta_0^2 \quad (3.31)$$

Para a situação de estado estacionário, podemos escrever a equação (3.30) como:

$$\theta_0 = \theta_0^2 \quad (3.32)$$

Portanto, o sistema ideal com excitação série é representado pelas equações (3.23) e (3.32), ou seja:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\zeta_\theta \dot{\theta} + \sigma \theta^3 = \mu (\theta_0^2) \cos(\theta_0 \tau) \\ \theta_0 = \theta_0^2 \end{cases}$$

3.2 Sistema não-ideal

Todo sistema tratado como não-ideal tem um grau de liberdade a mais que o seu correspondente ideal [3]. Sendo assim, para descrevermos o comportamento dinâmico do sistema da Figura 4, considerando-o como não-ideal, utilizaremos além das equações mecânicas a equação elétrica do motor.

3.2.1 Equações da dinâmica do sistema

3.2.1.1 Motor CC com Excitação Independente suportado por uma Estrutura Elástica

A velocidade da massa desbalanceadora, m , da Figura 4 é dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{estrutura} + \mathbf{v}_{rotor} \times \mathbf{r} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt} - \omega r \sin\theta \right) \mathbf{i} + \omega r \cos\theta \mathbf{j} \quad (3.34)$$

As energias cinética (E_c) e potencial (E_p) do sistema são

$$E_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} (2mr \sin\theta) \frac{dx}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3.35)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_L x^2 + \frac{1}{4} k_{NL} x^4 + mgr(1 + \sin\theta) \quad (3.36)$$

Para definirmos as equações de movimento do sistema da Figura 4, utilizamos as equações de movimento de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_j} + \frac{\partial E_P}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.37)$$

Que para o sistema em estudo, considerando as coordenadas x e θ resultam em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = -c_x \dot{x} \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = -c_\theta \dot{\theta} + T_M - T_L(t) \quad (3.39)$$

onde T_M é o torque produzido pelo motor e $T_L(t)$ é o torque resistente da carga de massa m .

Aplicando as equações (3.38) e (3.39) ao sistema da FIGURA 4, obtemos

$$(M + m)x'' + k_L x + k_{NL} x^3 - m r \sin \theta \theta'' - m r \cos \theta (\theta')^2 = -c_x x' \quad (3.40)$$

$$(J + m r^2) \theta'' - m r \sin \theta x'' + m g r \cos \theta = -c_\theta \theta' + T_M - T_L(t) \quad (3.41)$$

Para escrevermos as equações (3.40) e (3.41) na forma adimensional, primeiro definimos o deslocamento adimensional como $z = \frac{x}{r}$.

$$(M + m) r z'' + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 - m r \sin \theta \theta'' - m r \cos \theta (\theta')^2 = -c_x r z' \quad (3.42)$$

$$(J + m r^2) \theta'' - m r^2 \sin \theta z'' + m g r \cos \theta = -c_\theta \theta' + T_M - T_L(t) \quad (3.43)$$

Agora, definindo o tempo adimensional como $\tau = \omega_0 t$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema. Temos as seguintes equações adimensionais:

$$(M + m)\omega_0^2 r + k_L r z + k_{NL} r^3 z^3 - m r \sin \theta \omega_0^2 - m r \cos \theta \omega_0^2 (\theta)^2 = -c_x \omega_0 r \quad (3.44)$$

$$(J + m r^2) \omega_0^2 - m r^2 \sin \theta \omega_0^2 + m g r \cos \theta + c_\theta \omega_0 \dot{\theta} = T_M - T_L(t) \quad (3.45)$$

Dividindo a equação (3.44) por $(M + m)\omega_0^2 r$

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{k_L}{(M + m)\omega_0^2} z + \frac{k_{NL}}{(M + m)\omega_0^2} r^2 z^3 - \frac{m}{(M + m)} \sin \theta \\ & - \frac{m}{(M + m)} \cos \theta (\theta)^2 = -\frac{c_x}{(M + m)\omega_0} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Manipulando a equação (3.46)

$$\begin{aligned} & -\frac{c_x}{(M + m)\omega_0} - \frac{k_L}{(M + m)\omega_0^2} z - \frac{k_{NL}}{(M + m)\omega_0^2} r^2 z^3 + \frac{m}{(M + m)} \sin \theta \\ & + \frac{m}{(M + m)} \cos \theta (\theta)^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

e fazendo

$$2\zeta_x = \frac{c_x}{(M + m)\omega_0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_L}{M + m}} \quad \sigma = \frac{k_{NL} r^2}{(M + m)\omega_0^2} \quad \mu = \frac{m}{M + m} \quad (3.48)$$

Podemos escrever a equação (3.47) na forma

$$-2\zeta_x \dot{z} - \sigma z^3 + \mu \sin \theta + \mu \cos \theta (\theta)^2 \quad (3.49)$$

Dividindo a equação (3.45) por $(J + m r^2) \omega_0^2$

$$\cancel{\theta} + \frac{c_\theta}{(J + mr^2)\omega_0} \cancel{\theta} + \frac{mr^2}{(J + mr^2)} \cancel{\sin\theta} + \frac{mgr}{(J + mr^2)\omega_0^2} \cos\theta = \frac{T_M - T_L(t)}{(J + mr^2)\omega_0^2} \quad (3.50)$$

Manipulando a equação (3.50), temos:

$$\begin{aligned} \cancel{\theta} = -\frac{c_\theta}{(J + mr^2)\omega_0} \cancel{\theta} + \frac{mr^2}{(J + mr^2)} \cancel{\sin\theta} + \frac{mgr}{(J + mr^2)\omega_0^2} \cos\theta \\ + \frac{T_M}{(J + mr^2)\omega_0^2} - \frac{T_L(t)}{(J + mr^2)\omega_0^2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

e fazendo

$$2\zeta_\theta = \frac{c_\theta}{(J + mr^2)\omega_0} \quad \varepsilon = \frac{mr^2}{(J + mr^2)} \quad \kappa = \frac{g}{(\omega_0)^2 r} \quad \hat{T} = \frac{T_L(t)}{(J + mr^2)\omega_0^2} \quad (3.52)$$

Então, a equação (3.51) é escrita como:

$$\cancel{\theta} = -2\zeta_\theta \cancel{\theta} + \varepsilon \cancel{\sin\theta} + \kappa \cos\theta + \frac{T_M}{(J + mr^2)\omega_0^2} - \hat{T} \quad (3.53)$$

As equações do circuito elétrico do motor e do torque gerado [14] são respectivamente:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = V(t) \quad (3.54)$$

$$T_M = K_t i_a = c_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (3.55)$$

Substituindo a equação (3.55) em (3.53)

$$\cancel{\theta} = -2\zeta_\theta \cancel{\theta} + \varepsilon \cancel{\sin\theta} + \kappa \cos\theta + \frac{K_t i_a}{(J + mr^2)\omega_0^2} - \hat{T} \quad (3.56)$$

Então, podemos reescrever a equação (3.56) como:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -2\zeta_{\theta}\omega_0 + \varepsilon \sin\theta - \varepsilon K \cos\theta + 2\zeta_{\theta}i_a - \hat{T} \quad (3.57)$$

Agora, escreveremos a equação (3.54) na forma adimensional. Fazendo $\tau = \omega_0 t$

$$L_a \omega_0 \frac{di_a}{d\tau} + R_a i_a + K_b \omega_0 \frac{d\theta}{d\tau} = V(\tau) \quad (3.58)$$

Depois, definindo a corrente adimensional $i = \frac{i_a(\tau)}{i_0(\tau)}$ e a tensão adimensional

$$v = \frac{V(\tau)}{V_0(\tau)}.$$

$$L_a \omega_0 \frac{d(i i_0)}{d\tau} + R_a (i i_0) + K_b \omega_0 \frac{d\theta}{d\tau} = v i_0 \quad (3.59)$$

Sabemos que a corrente em estado estacionário, i_0 , tem valor constante e igual a

$$i_0 = \frac{c_{\theta} \omega_0}{K_t} \quad (3.60)$$

Substituindo a equação (3.60) em (3.59), temos:

$$\frac{d(i i_0)}{d\tau} + \frac{R_a}{L_a \omega_0} i i_0 + \frac{K_b K_t}{L_a \omega_0 c_{\theta}} \frac{d\theta}{d\tau} = \left(\frac{R_a c_{\theta} + K_b K_t}{L_a \omega_0 c_{\theta}} \right) i \quad (3.61)$$

Fazendo

$$\rho = \frac{R_a}{L_a \omega_0}; \quad \lambda = \frac{K_b K_t}{L_a \omega_0 c_{\theta}}; \quad \omega = \frac{d\theta}{d\tau} \quad (3.62)$$

Então,

$$\frac{d\psi}{d\tau} + \rho\psi + \lambda \frac{d\theta}{d\tau} = (\rho + \lambda)\psi \quad (3.63)$$

3.2.2 Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica

As equações de translação e de rotação adimensionais são similares àsquelas do sistema não-ideal com o motor de excitação independente. Assim, temos:

$$\ddot{z} = -2\zeta_x \dot{z} - z - \sigma z^3 + \mu \sin\theta + \mu \cos\theta \quad (3.64)$$

E a equação de rotação adimensional é

$$\ddot{\theta} = -2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta - \varepsilon K \cos\theta + \frac{T_M}{(J + mr^2)\omega_0^2} - \hat{T} \quad (3.65)$$

Considerando que o motor é de excitação série, a equação do circuito elétrico do motor e do torque gerado [15] são respectivamente:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_{bs} \frac{d\theta}{dt} i_a = V(t) \quad (3.66)$$

$$T_M = K_{ts} i_a^2 = c_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (3.67)$$

Substituindo a equação (3.67) em (3.65)

$$\ddot{\theta} = -2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta - \varepsilon K \cos\theta + \frac{K_{ts} i_a^2}{(J + mr^2)\omega_0^2} - \hat{T} \quad (3.68)$$

Assim, a equação (3.68) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -2\zeta_{\theta} \frac{d\theta}{d\tau} + \varepsilon \sin\theta - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_{\theta} i_a^2 - \hat{T} \quad (3.69)$$

Agora, colocaremos a equação (3.65) na forma adimensional. Primeiro, faremos

$$\tau = \omega_0 t .$$

$$L_a \omega_0 \frac{di_a}{d\tau} + R_a i_a + K_{bs} \omega_0 \frac{d\theta}{d\tau} i_a = V(\tau) \quad (3.70)$$

Em seguida, sabendo que a corrente adimensional $i = \frac{i_a(\tau)}{i_0}$ e a tensão adimensional

$v = \frac{V(\tau)}{V_0(\tau)}$, a equação (3.69) pode ser escrita como:

$$L_a \omega_0 \frac{d(i_0)}{d\tau} + R_a (i_0) + K_b \omega_0 \frac{d\theta}{d\tau} (i_0) = v_0 \quad (3.71)$$

Para o motor de corrente contínua de excitação série, a corrente em estado estacionário, i_0 , tem valor constante e igual a

$$i_0 = \sqrt{\frac{c_{\theta} \omega_0}{K_{ts}}} \quad (3.72)$$

Substituindo a equação (3.72) em (3.71), temos:

$$\frac{di_0}{d\tau} + \frac{R_a}{L_a \omega_0} i_0 + \frac{K_{bs}}{L_a} \frac{d\theta}{d\tau} i_0 = \frac{R_a + K_{bs} \omega_0}{L_a \omega_0} i_0 \quad (3.73)$$

Fazendo

$$\rho = \frac{R_a}{L_a \omega_0} \quad \lambda_s = \frac{K_{bs}}{L_a} \quad \omega = \frac{d\theta}{d\tau} \quad (3.74)$$

Portanto, a equação (3.73) tem a seguinte forma:

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\tau} + \rho\dot{\theta} + \lambda_s\dot{\theta} = (\rho + \lambda)\dot{\theta} \quad (3.75)$$

3.2.3 Rendimento

3.2.3.1 Motor CC com excitação independente suportado por uma estrutura elástica

Para a determinação da expressão para o cálculo do rendimento, η , fazemos uso da definição

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \quad (3.76)$$

onde

$$P_o = 2\xi_\theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.77)$$

$$P_i = \dot{\theta}$$

Além disto, em estado estacionário temos:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} = \dot{\theta} \quad (3.78)$$

Portanto, a equação (3.76) toma a seguinte forma:

$$\eta_I = 2\xi_\theta \quad (3.79)$$

3.2.3.2 Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica

Sabemos que a equação do circuito elétrico do motor de corrente contínua na forma adimensional é

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \rho\theta + \lambda_s \frac{d\theta}{d\tau} = (\rho + \lambda_s)\theta \quad (3.80)$$

Em estado estacionário

$$\theta = \theta_0 \quad (3.81)$$

Da equação.(3.80) temos:

$$\theta_0 = \frac{1}{(\rho + \lambda)} + \rho(\theta_0)^{1/2} + \lambda(\theta_0)^{3/2} \quad (3.82)$$

Assim, a expressão para o rendimento é

$$\eta_s = 2\zeta_\theta (\rho + \lambda_s) \frac{(\theta_0)^2}{\rho\theta_0 + \lambda_s(\theta_0)^2} \quad (3.83)$$

3.3 Equações de estado

Vemuri [16] mostra que o estado do sistema informa o que o sistema está “operando” num certo instante de tempo. Meredith et al [17] denominou o conjunto de variáveis de estado (ou variáveis de referência) utilizadas para descrever o sistema de vetor de estado.

Há três problemas envolvidos na teoria de estados [17]:

- a) determinar se uma variável pode ou não ser qualificada como uma variável de estado;
- b) determinar o conjunto mínimo de variáveis que constituirão o vetor de estado capaz de retratar a configuração do sistema ou seu comportamento;
- c) determinar se o modelo será utilizado para retratar o estado do sistema ou prever futuros padrões de comportamento.

Como escolher adequadamente as variáveis de estado? O vetor de estados deve ser composto pelas seguintes variáveis [17]:

- a) atributos do sistema relativos a um conjunto de seus componentes;
- b) descritores da configuração atual do sistema, dos componentes atualmente em operação, da localização relativa e espacial;
- c) descritores da(s) configuração(ões) passada(s) do sistema;
- d) vetor atual de entradas;
- e) descritores de entrada(s) passada(s) no sistema;
- f) descritores indicando o vetor atual de potenciais estados futuros do sistema;
- g) descritores da história passada dos potenciais estados futuros do sistema e da história dos estados;
- h) variáveis de propósitos especiais.

3.3.1 Motor CC com excitação independente suportado por uma estrutura elástica

Podemos descrever o comportamento dinâmico do sistema apresentado na Figura 4, através das seguintes equações:

$$\ddot{z} = -2\zeta_x \dot{z} - z - \sigma z^3 + \mu \sin\theta \ddot{\theta} + \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.84)$$

$$\ddot{\theta} = -2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta \ddot{\alpha} - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_\theta i_a - \hat{T} \quad (3.85)$$

$$\dot{\rho} = (\rho + \lambda)\rho - \rho \dot{\rho} - \lambda \frac{d\theta}{d\tau} \quad (3.86)$$

Definindo $\mathbf{x}(t)$ como o vetor de estado, temos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \rho \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Substituindo a equação (3.85) em (3.84)

$$\ddot{z} = -2\zeta_x \dot{z} - z - \sigma z^3 + \mu \sin\theta (-2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta \ddot{\alpha} - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_\theta \dot{\rho} - \hat{T}) + \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.88)$$

Manipulando a equação (3.88)

$$\ddot{z} = \frac{-1}{(1 - \mu \varepsilon \sin^2\theta)} \left[2\zeta_x \dot{z} + z + \sigma z^3 + 2\mu \sin\theta \zeta_\theta \dot{\theta} + \mu \varepsilon \kappa \frac{\sin 2\theta}{2} - 2\mu \sin\theta \zeta_\theta \dot{\rho} + \mu \sin\theta \hat{T} - \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \right] \quad (3.89)$$

Depois, substituindo a equação (3.89) em (3.85)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -2\zeta_{\theta}\theta - \frac{\varepsilon \sin\theta}{(1-\mu\varepsilon \sin^2\theta)} (2\zeta_x \dot{x} + z + \sigma z^3 + 2\mu \sin\theta \zeta_{\theta} \dot{\theta} + \mu \varepsilon \kappa \frac{\sin 2\theta}{2} \\ & - 2\mu \sin\theta \zeta_{\theta} \dot{\theta} + \mu \sin\theta \hat{T} - \mu \cos\theta (\dot{\theta}^2) \\ & - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_{\theta} \dot{\theta} - \hat{T} \end{aligned} \quad (3.90)$$

E manipulando a equação (3.90)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \frac{-1}{(1-\mu\varepsilon \sin^2\theta)} (2\zeta_{\theta} \dot{\theta} + 2\varepsilon \zeta_x \sin\theta \dot{x} + \varepsilon \sin\theta z + \varepsilon \sigma \sin\theta z^3 \\ & - \varepsilon \mu \frac{\sin 2\theta}{2} (\dot{\theta}^2) + \varepsilon \kappa \cos\theta - 2\zeta_{\theta} \dot{\theta} + \hat{T} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Portanto, obtemos as seguintes equações de estado:

$$x_2 = \dot{x} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{-1}{(1-\mu\varepsilon \sin^2 x_3)} (2\zeta_{x_1} x_2 + x_1 + \sigma x_1^3 + 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) x_4 + \frac{\mu \varepsilon \kappa}{2} \sin 2x_3 \\ & - 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) x_5 + \mu \sin x_3 \hat{T} - \mu (\cos x_3) x_4^2) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$x_4 = \dot{\theta} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{1}{(1-\mu\varepsilon \sin^2 x_3)} (2\zeta_{x_3} x_4 + 2\zeta_{x_1} \varepsilon x_2 \sin x_3 + \varepsilon x_1 \sin x_3 + \varepsilon \sigma x_1^3 \sin x_3 \\ & - \frac{\varepsilon \mu}{2} \sin(2x_3) x_4^2 + \varepsilon \kappa \cos x_3 - 2\zeta_{x_3} x_5 + \hat{T}) \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$x_5 = \dot{\theta} \quad (3.96)$$

$$\dot{x}_5 = -\rho x_5 - \lambda x_4 + (\rho + \lambda) \dot{\theta} \quad (3.97)$$

3.3.2 Motor CC com excitação série suportado por uma estrutura elástica

O sistema da Figura 4 tem o seu comportamento dinâmico descrito pelas seguintes equações:

$$\ddot{z} = -2\zeta_x \dot{z} - z - \sigma z^3 + \mu \sin\theta \ddot{\theta} + \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.98)$$

$$\ddot{\theta} = -2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta \ddot{z} - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_\theta (\dot{\theta})^2 - \hat{T} \quad (3.99)$$

$$\dot{i} = (\rho + \lambda_s) i - \rho i - \lambda_s \theta i \quad (3.100)$$

O vetor de estado, $\mathbf{x}(t)$, é definido por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ i \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Substituindo a equação (3.99) em (3.98)

$$\ddot{z} = -2\zeta_x \dot{z} - z - \sigma z^3 + \mu \sin\theta (-2\zeta_\theta \dot{\theta} + \varepsilon \sin\theta \ddot{z} - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_\theta (\dot{\theta})^2 - \hat{T}) + \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.102)$$

Manipulando a equação (3.102), podemos escrever:

$$\ddot{z} = \frac{-1}{(1 - \mu \varepsilon \sin^2\theta)} \left[2\zeta_x \dot{z} + z + \sigma z^3 + 2\mu \sin\theta \zeta_\theta \dot{\theta} + \mu \varepsilon \kappa \frac{\sin 2\theta}{2} - 2\mu \sin\theta \zeta_\theta (\dot{\theta})^2 + \mu \sin\theta \hat{T} - \mu \cos\theta (\dot{\theta})^2 \right] \quad (3.103)$$

Substituindo a equação (3.103) em (3.99)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -2\zeta_{\theta}\theta - \frac{\varepsilon \sin\theta}{(1-\mu\varepsilon \sin^2\theta)} [2\zeta_x \theta + z + \sigma z^3 + 2\mu \sin\theta \zeta_{\theta} \theta + \mu \varepsilon \kappa \frac{\sin 2\theta}{2} \\ & - 2\mu \sin\theta \zeta_{\theta} (\dot{\theta})^2 + \mu \sin\theta \hat{T} - \mu \cos\theta (\theta)^2] \\ & - \varepsilon \kappa \cos\theta + 2\zeta_{\theta} (\dot{\theta})^2 - \hat{T} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Portanto, as equações de estado são:

$$x_2 = \theta \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{-1}{(1-\mu\varepsilon \sin^2 x_3)} [2\zeta_{x_1} x_2 + x_1 + \sigma x_1^3 + 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) x_4 + \frac{\mu \varepsilon \kappa}{2} \sin 2x_3 \\ & - 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) (x_5)^2 + \mu \sin x_3 \hat{T} - \mu (\cos x_3) x_4^2] \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$x_4 = \dot{\theta} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{-1}{(1-\mu\varepsilon \sin^2 x_3)} [2\zeta_{x_3} x_4 + 2\zeta_{x_1} \varepsilon x_2 \sin x_3 + \varepsilon x_1 \sin x_3 + \varepsilon \sigma x_1^3 \sin x_3 \\ & - \frac{\varepsilon \mu}{2} \sin(2x_3) x_4^2 + \varepsilon \kappa \cos x_3 - 2\zeta_{x_3} (x_5)^2 + \hat{T}] \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$x_5 = \dot{\theta} \quad (3.109)$$

$$\dot{x}_5 = (\rho + \lambda) \dot{\theta} - \rho x_5 - \lambda x_4 x_5 \quad (3.110)$$

4 RESULTADOS

Os resultados que serão apresentados a seguir, foram obtidos através da resolução dos sistemas de estados, utilizando-se o método clássico de Runge-Kutta de quinta ordem, com passo variável.

Este método apresenta a vantagem de que o passo de evolução h pode ser mudado a qualquer instante, de acordo com a estimativa de erro local.

4.1 Motor CC de excitação independente suportado por uma estrutura flexível

Utilizando as equações de estado obtidas na seção 3.3.1, temos:

$$\dot{x}_2 = \omega \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = \frac{-1}{(1 - \mu \varepsilon \sin^2 x_3)} & (2\zeta_{x_1} x_2 + x_1 + \sigma x_1^3 + 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) x_4 + \frac{\mu \varepsilon \kappa}{2} \sin 2x_3 \\ & - 2\mu \zeta_{x_3} (\sin x_3) x_5 + \mu \sin x_3 \hat{T} - \mu (\cos x_3) x_4^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_4 = \theta \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \frac{1}{(1 - \mu \varepsilon \sin^2 x_3)} & (2\zeta_{x_3} x_4 + 2\zeta_{x_1} \varepsilon x_2 \sin x_3 + \varepsilon x_1 \sin x_3 + \varepsilon \sigma x_1^3 \sin x_3 \\ & - \frac{\varepsilon \mu}{2} \sin(2x_3) x_4^2 + \varepsilon \kappa \cos x_3 - 2\zeta_{x_3} x_5 + \hat{T}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{\varphi} \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_5 = -\rho x_5 - \lambda x_4 + (\rho + \lambda) \varphi \quad (4.6)$$

Os resultados foram obtidos através de simulações feitas escrevendo as equações de estado na forma de diagrama de blocos, conforme apresentado na Figura 5.

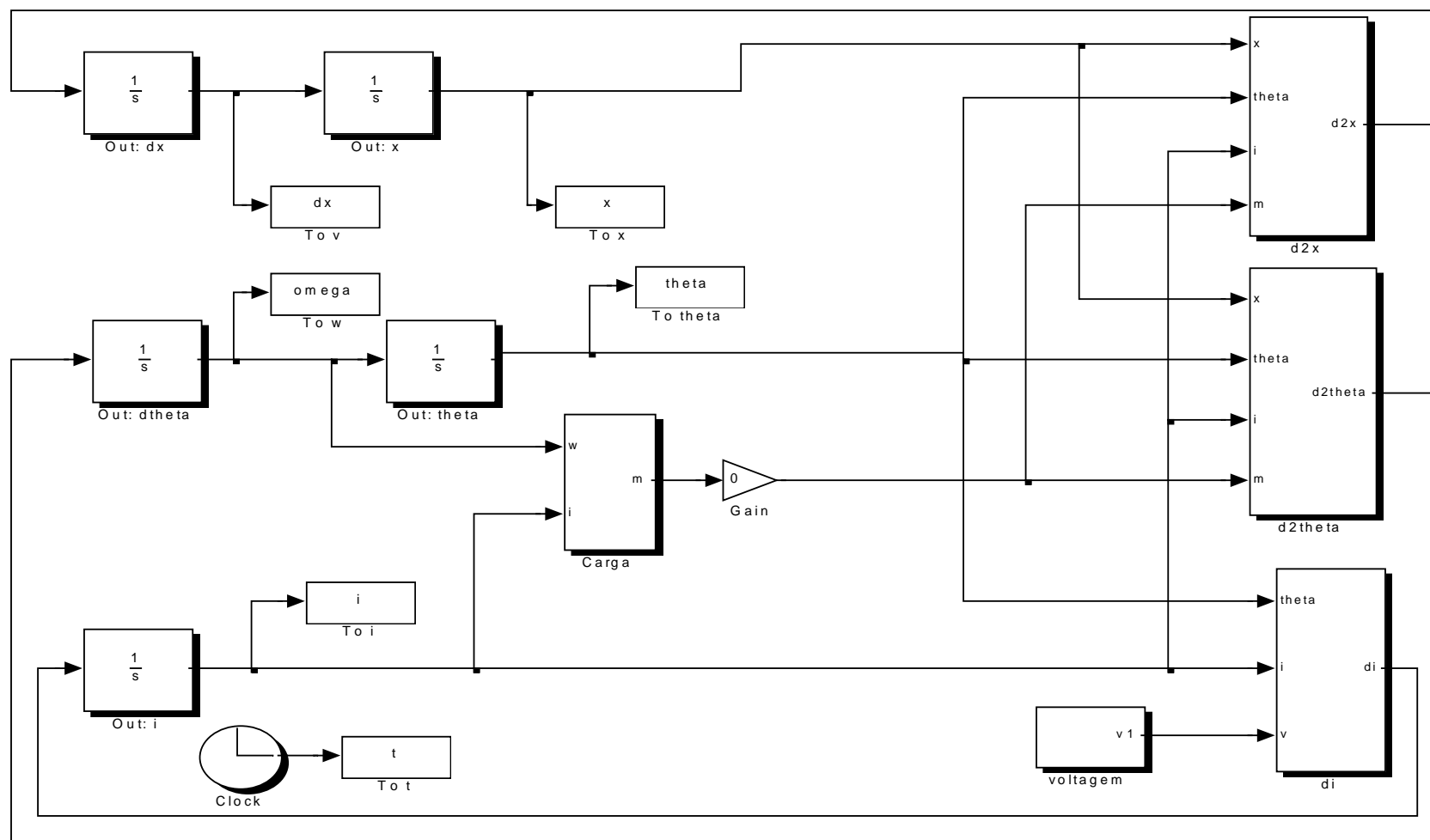


FIGURA 5 – Diagrama de blocos do sistema não-ideal.

A Tabela 2 apresenta os valores dos parâmetros utilizados na simulação.

TABELA 2
Parâmetros para simulação do sistema não-ideal com $\sigma = 0$.

| Parâmetro | Valor | Parâmetro | Valor |
|----------------|------------|---------------|------------|
| ζ_x | 5.0000e-02 | λ | 3.9584e+00 |
| ζ_θ | 1.8132e-02 | μ | 2.5974e-02 |
| σ | 0 | ρ | 7.6899e+02 |
| κ | 0 | ε | 4.4444e-01 |

A Figura 6 mostra que amplitude de vibração do sistema não-ideal é função da rotação do motor. O valor máximo da amplitude de vibração aparece na situação em que a frequência de rotação é igual a frequência natural do sistema. Também podemos visualizar que o sentido de variação da rotação é fundamental para a determinação do comportamento da vibração. No sentido ascendente da rotação, observamos que o valor máximo da amplitude de vibração é algo em torno de 0,25. Já no sentido descendente, a amplitude máxima é de aproximadamente 0,18.

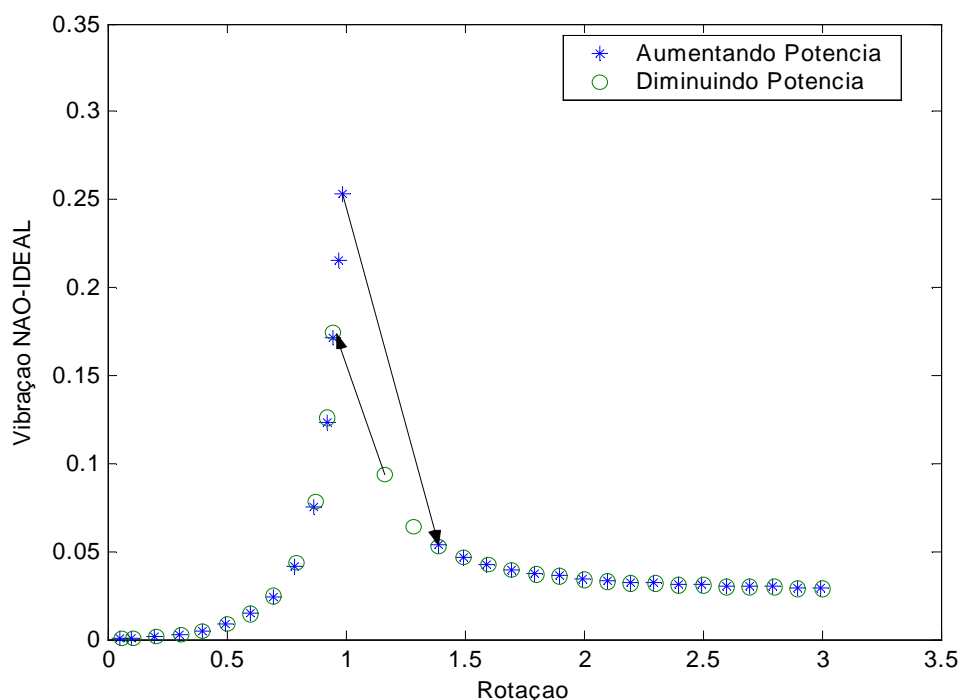


FIGURA 6 – Vibração do sistema não-ideal em função da rotação do motor.

Analisando a Figura 7, verificamos que o rendimento do sistema não-ideal não tem valor constante para toda a faixa de rotação. À medida que a frequência de rotação cresce na direção da frequência natural do sistema, o valor do rendimento cai até atingir o mínimo na situação em que a frequência de rotação é igual à frequência de ressonância. Na faixa de rotação de 1 a aproximadamente 1,5, toda a energia elétrica fornecida ao motor é utilizada para suprir as perdas elétricas e mecânicas, não havendo potência útil disponível no eixo do motor. A partir da rotação de 1,5, o rendimento do motor passa a aumentar com o aumento da rotação até atingir o valor constante e igual a 3,6.

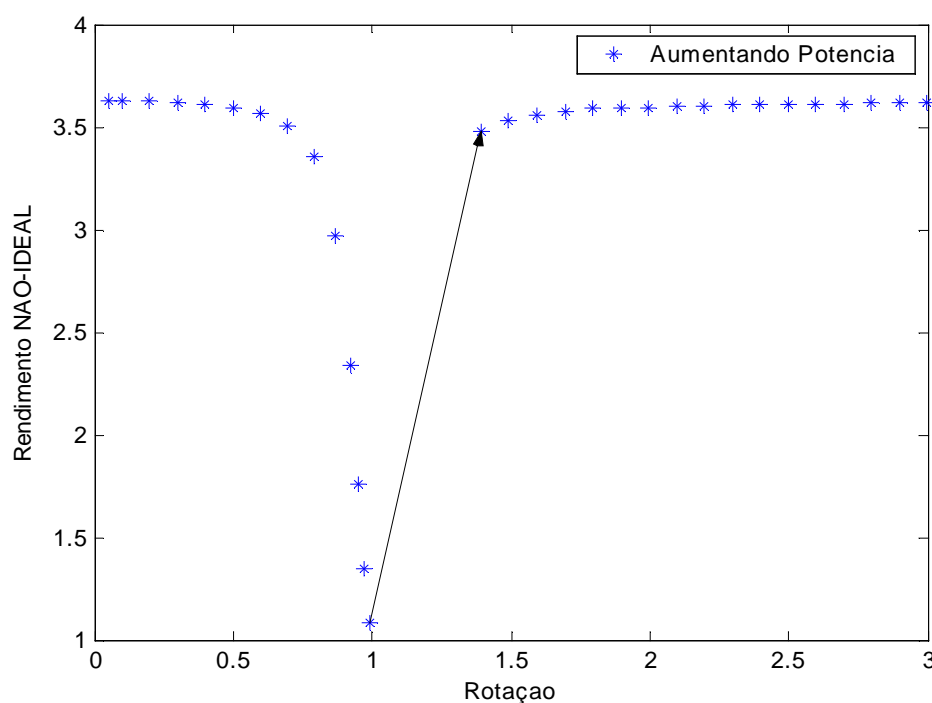


FIGURA 7 – Rendimento do sistema não-ideal em função do aumento da rotação do motor.

Na situação apresentada na Figura 8, o sistema tem um rendimento constante e igual a 3,6 na faixa de rotação compreendida entre 3,0 e 1,5. Observamos que a partir da rotação de 1,5, o rendimento começa a cair e continua assim até 1,3. Há uma região de descontinuidade do rendimento, na faixa de rotação de 1,3 a 1,0. Nesta região, toda a energia elétrica fornecida ao motor é para suprir as perdas elétricas e mecânicas inerentes ao seu funcionamento. Mas, para um valor de

rotação inferior a 1,0 unidade, o motor volta a disponibilizar potência útil no seu eixo, o que faz com que o rendimento comece a crescer.

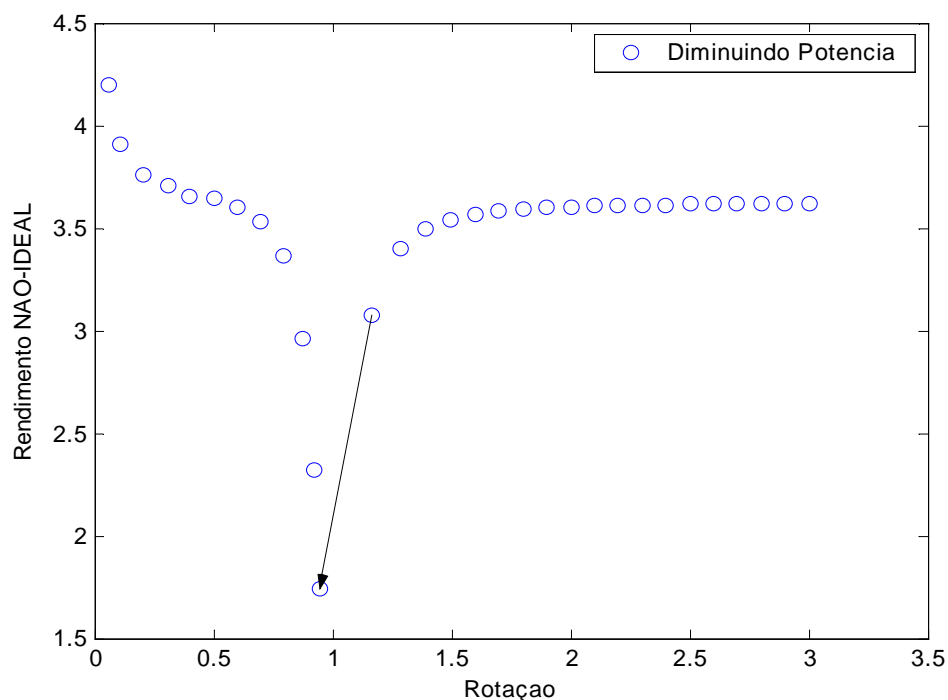


FIGURA 8 – Rendimento do sistema não-ideal em função da diminuição da rotação do motor.

As Figuras 9 e 10 mostram, respectivamente para velocidade crescente (aumento de potência) e decrescente (diminuição de potência), a razão entre os rendimentos, considerando os sistemas não-ideal e ideal.

Para uma mesma potência disponível no eixo do motor, a análise da Figura 9 nos mostra que em algumas faixas de rotação do motor, os rendimentos dos sistemas não-ideal e ideal são iguais para o mesmo valor de rotação. Também observamos a existência de uma faixa de rotação na qual a rotação do motor aumenta e o rendimento não. Nesta faixa, dizemos que o motor foi “capturado” pela frequência natural do sistema. A variação da razão dos rendimentos a partir do momento em que o sistema foi capturado até o momento do “salto” é de aproximadamente 70%.

Os resultados apresentados na Figura 10 indicam que o rendimento também é sensível a variação decrescente da rotação motor. Observamos que o motor também foi “capturado” pela frequência natural do sistema e a razão dos rendimentos sofre uma variação de 50%.

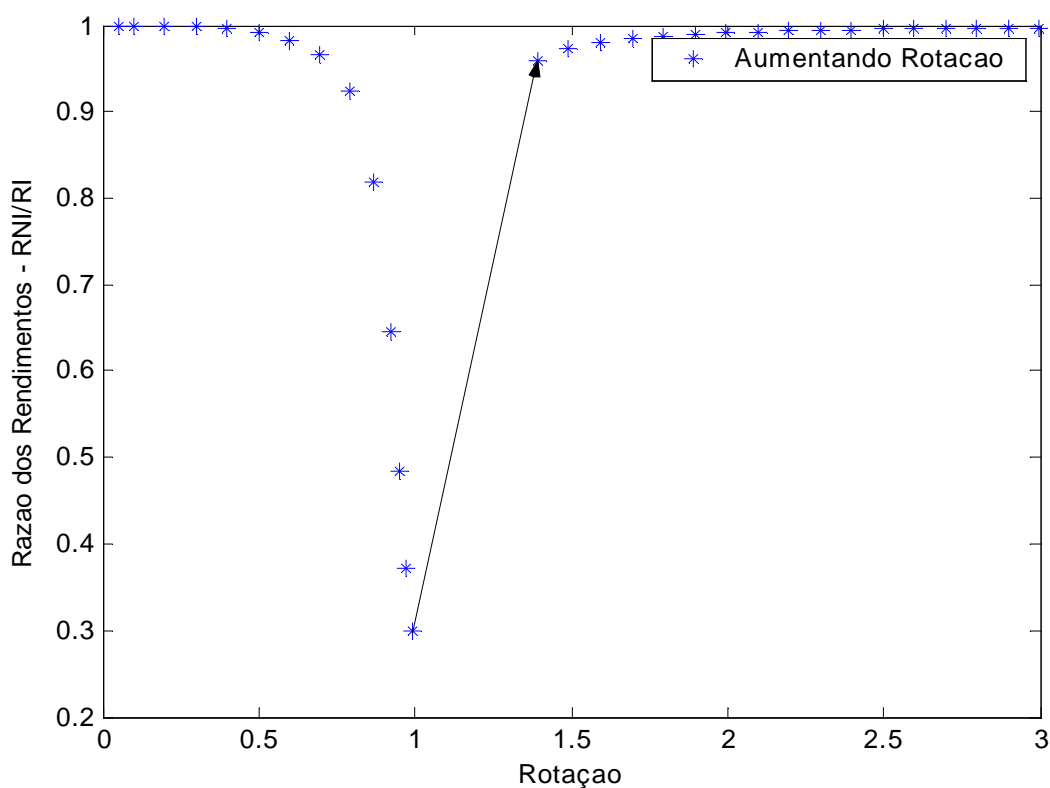


FIGURA 9 – Razão entre os rendimentos não-Ideal e ideal.

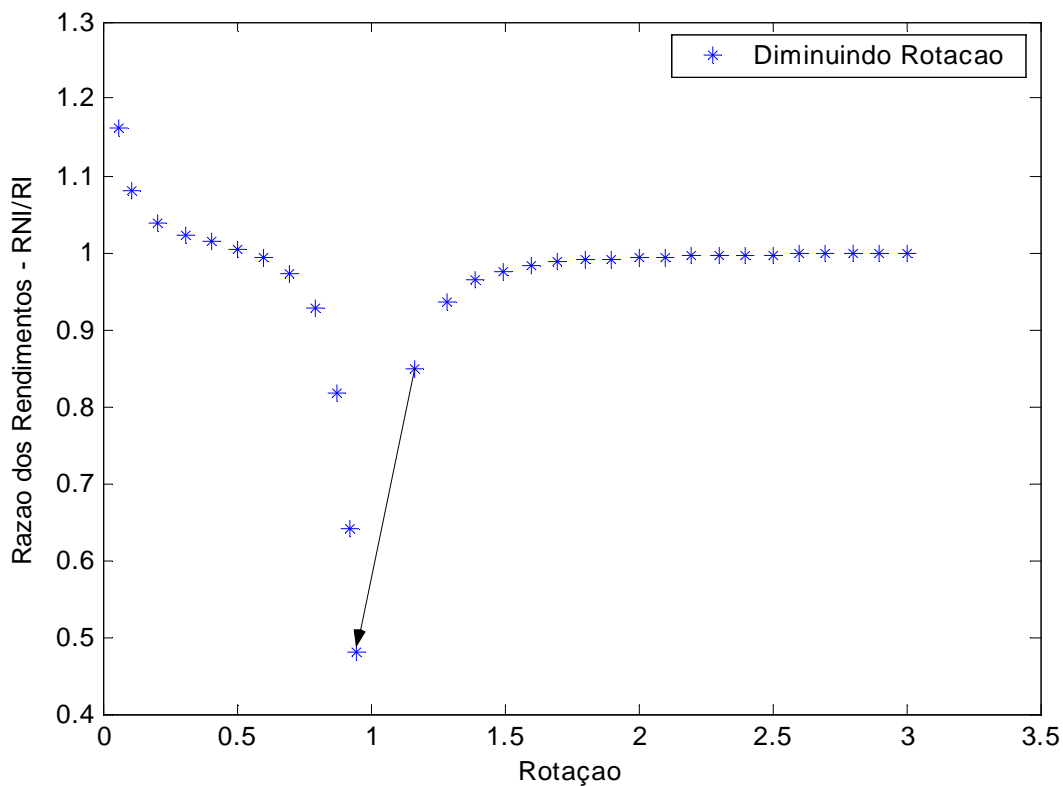


FIGURA 10 – Razão entre os rendimentos não-ideal e ideal.

Os resultados a seguir foram obtidos a partir de simulação numérica feita com os parâmetros apresentados na Tabela 3.

TABELA 3
Parâmetros para simulação do sistema não-ideal com $\sigma \neq 0$.

| Parâmetro | Valor | Parâmetro | Valor |
|----------------|------------|---------------|------------|
| ζ_x | 5.0000e-02 | λ | 3.9584e+00 |
| ζ_θ | 1.8132e-02 | μ | 2.5974e-02 |
| σ | 5.0000e-04 | ρ | 7.6899e+02 |
| κ | 0 | ε | 4.4444e-01 |

As Figuras 11, 12 e 13 mostram que a amplitude de vibração do sistema não-ideal é uma função descontínua da rotação. Quando a frequência natural do sistema é

alcançada, observamos que a amplitude de vibração no sentido crescente da rotação é maior do que na situação em que há o decréscimo da rotação.

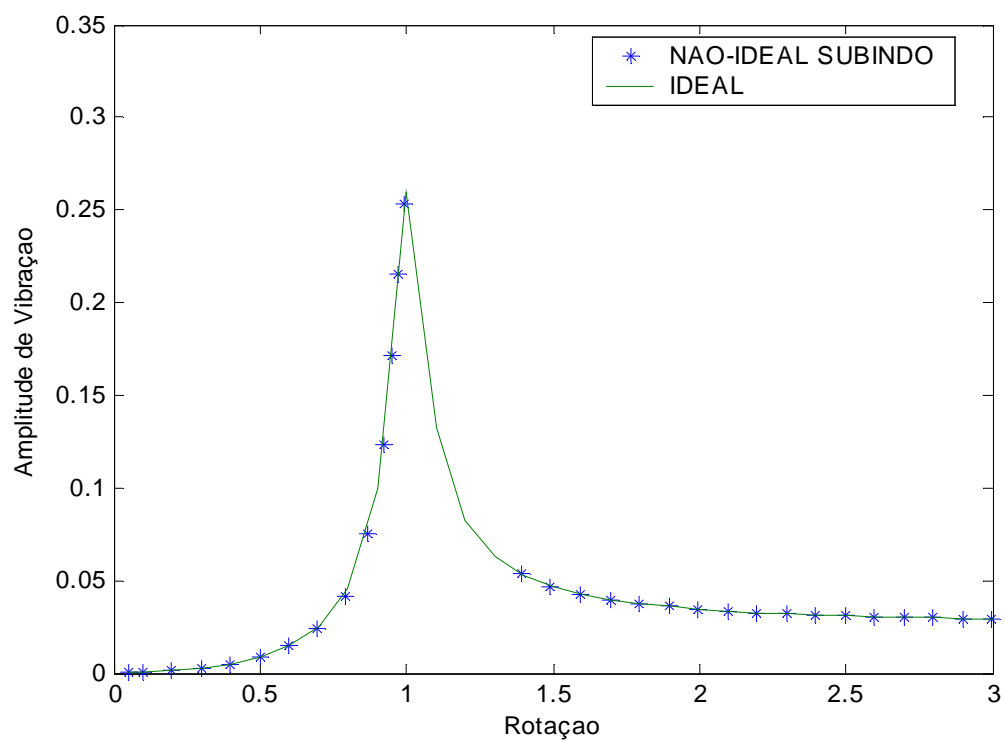


FIGURA 11 – Amplitude de vibração com o aumento da rotação.

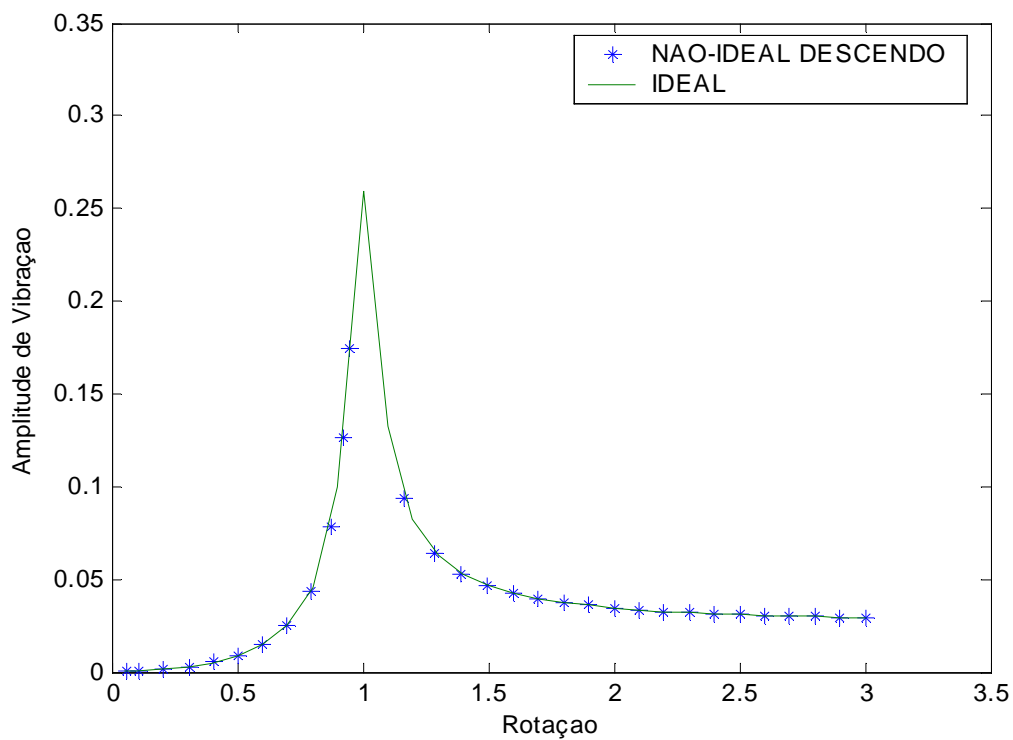


FIGURA 12 – Amplitude de vibração com o decréscimo da rotação.

Ao analisarmos a Figura 13, verificamos que além da amplitude de vibração ser uma função descontínua da rotação, também percebemos que a máxima amplitude ocorre no sentido crescente da rotação (aumento de potência).

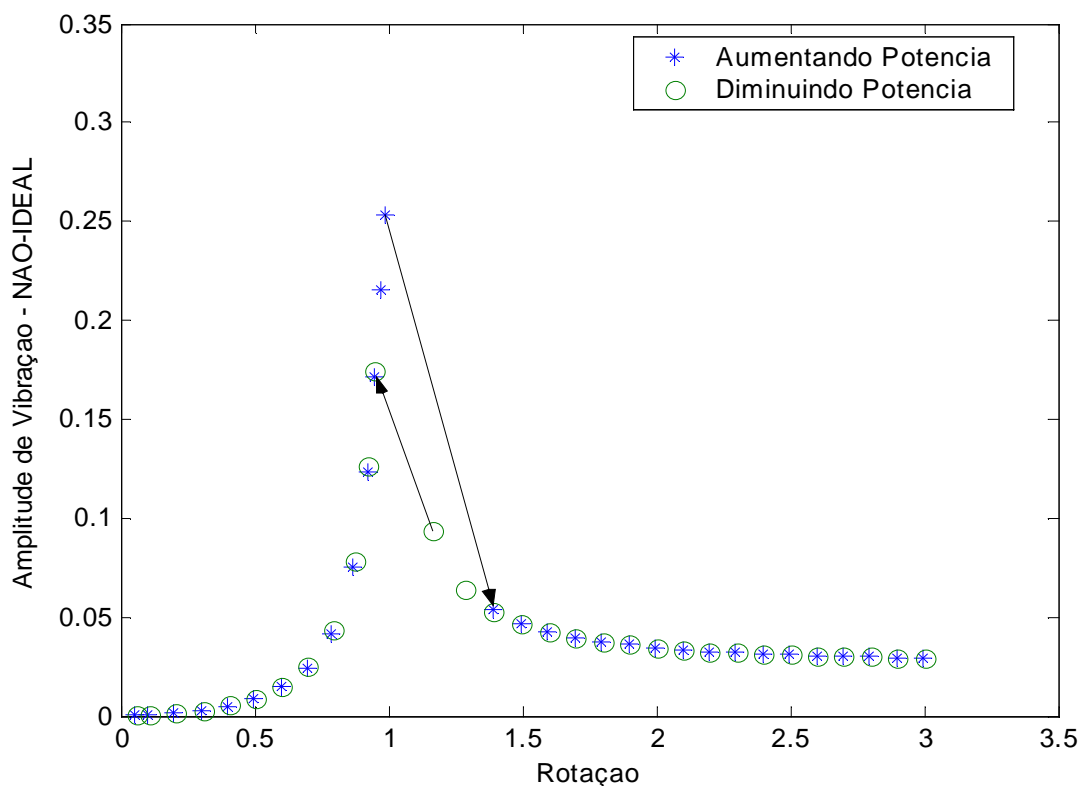


FIGURA 13 – Amplitude de vibração do sistema não-ideal.

As Figuras 14 e 15 nos mostram que o rendimento do sistema não-ideal é dependente do sentido de variação da velocidade do motor. Observamos que o rendimento tem o seu valor mínimo quando a frequência de rotação torna-se igual à frequência natural do sistema.

É interessante ressaltar que o valor mínimo na condição de diminuição da rotação é maior do que o valor observado na condição de aumento da rotação.

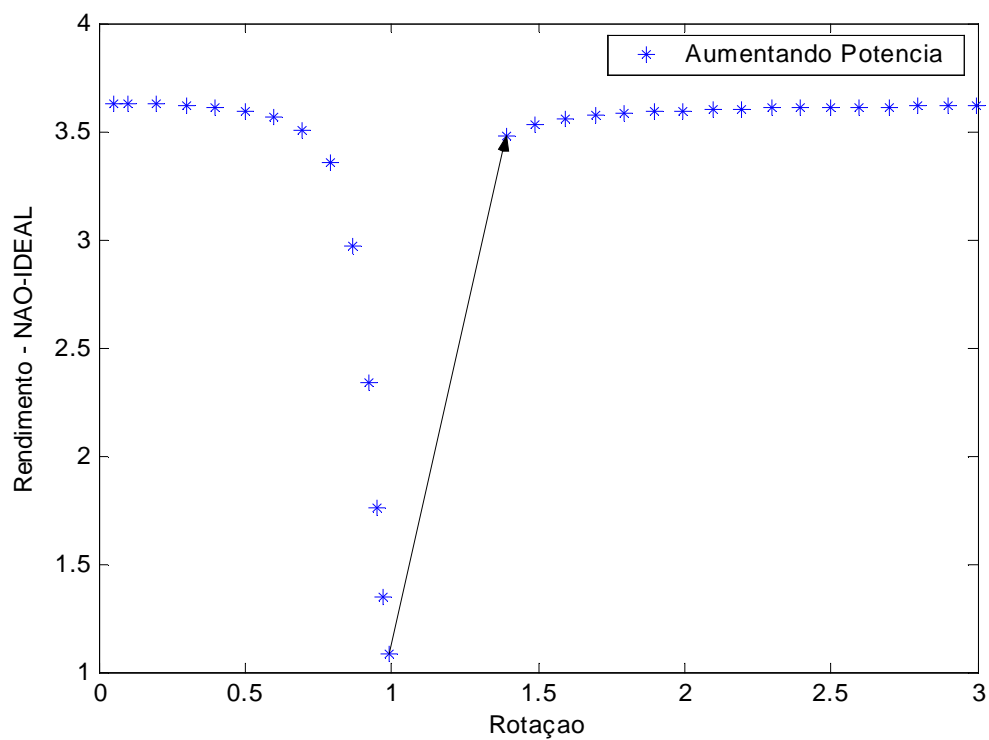


FIGURA 14 – Rendimento do sistema não-ideal com o aumento da rotação.

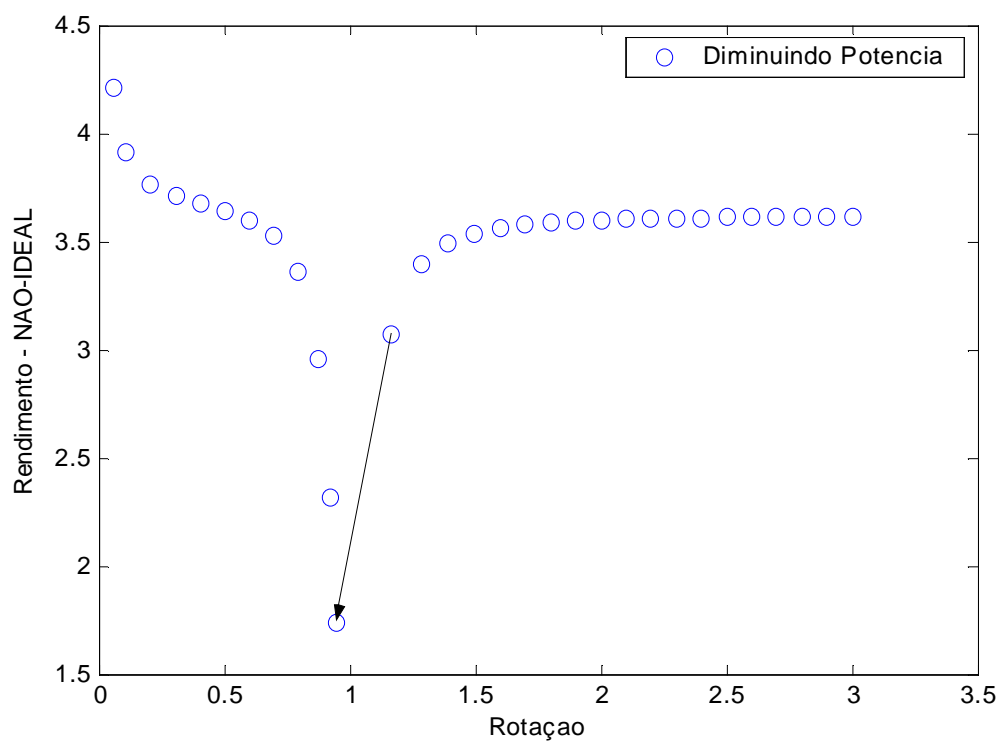


FIGURA 15 – Rendimento do sistema não-ideal com a diminuição da rotação.

Para uma mesma potência disponível no eixo do motor, a análise da Figuras 16 e 17 nos permite verificar que em algumas faixas de rotação do motor, os rendimentos dos sistemas ideal (RI) e não-ideal (RNI) são iguais para o mesmo valor de rotação. Além disto, para algumas faixas de rotação o rendimento é praticamente constante.

A variação da razão dos rendimentos na região de “captura” do motor é de aproximadamente 70%.

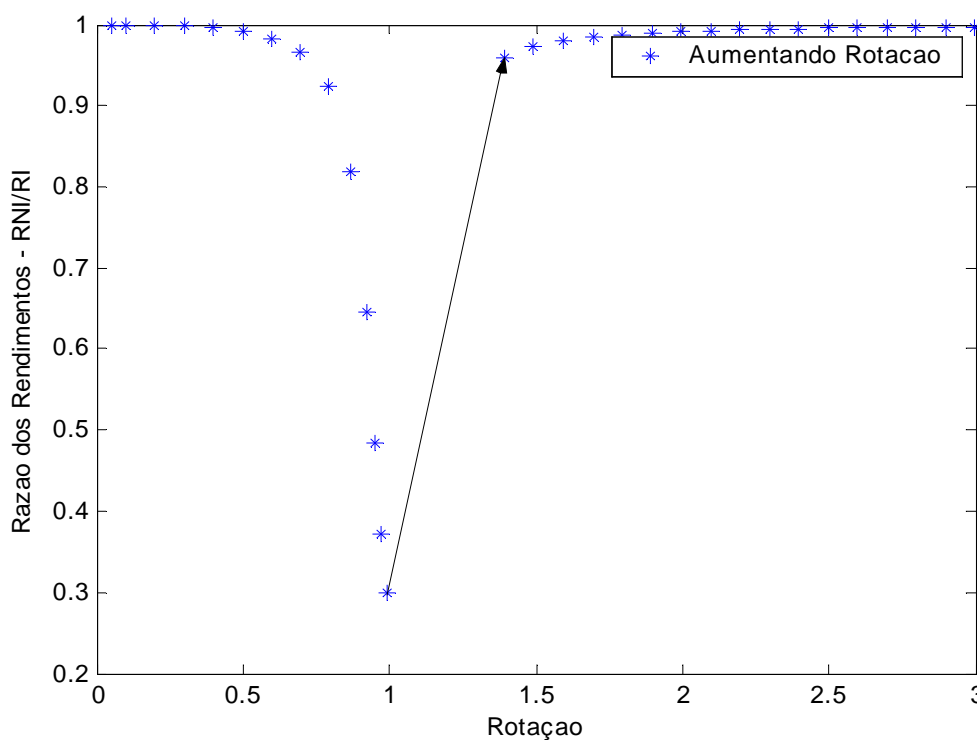


FIGURA 16 – Razão entre os rendimentos com o aumento da rotação.

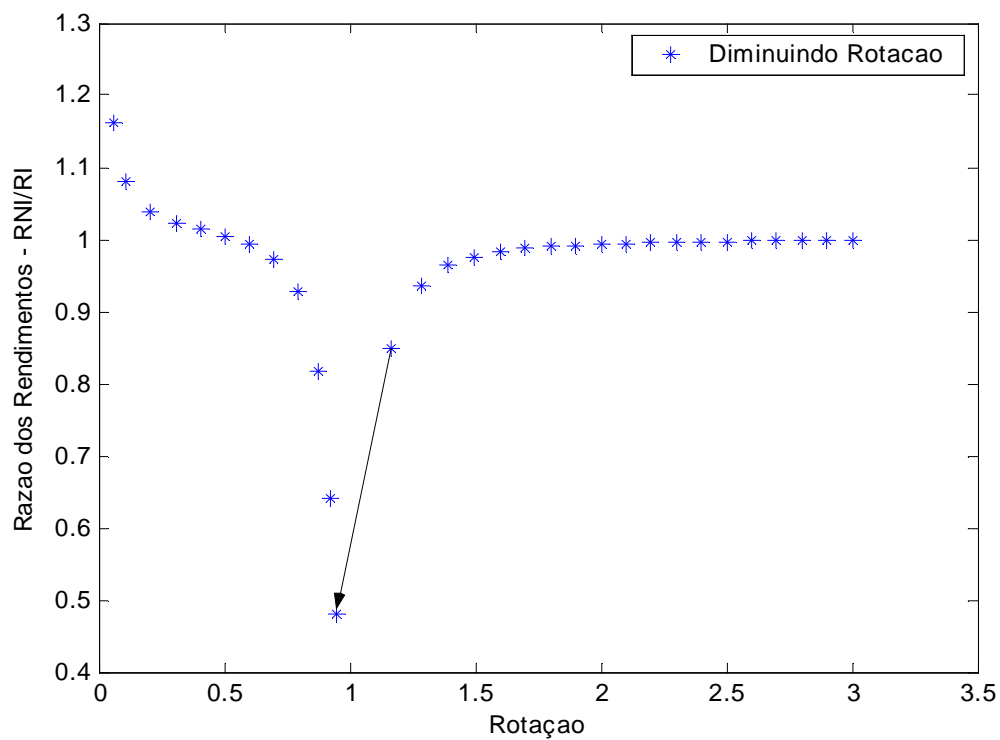


FIGURA 17 – Razão entre os rendimentos com a diminuição da rotação.

4.2 Motor CC de excitação série suportado por uma estrutura flexível

Utilizamos os parâmetros listados na Tabela 4 para a simulação numérica.

TABELA 4

Parâmetros para simulação do sistema não-ideal para motor cc de excitação série.

| Parâmetro | Valor | Parâmetro | Valor |
|----------------|------------|---------------|------------|
| ζ_x | 5.0000e-02 | λ | 3.9584e+00 |
| ζ_θ | 1.8132e-02 | μ | 2.5974e-02 |
| σ | 0 | ρ | 7.6899e+02 |
| κ | 0 | ε | 4.4444e-01 |

A Figura 18 mostra que a vibração do sistema não-ideal é uma função da rotação do motor e depende do sentido de variação. Na situação em que a frequência de rotação é igual à frequência natural do sistema, observamos que a amplitude de vibração atinge o seu valor máximo nos sentidos crescente e decrescente da rotação do motor. No sentido crescente da rotação, o valor máximo observado da amplitude de vibração está em torno de 0,26. Para o sentido decrescente, verificamos que a amplitude máxima é de aproximadamente 0,12.

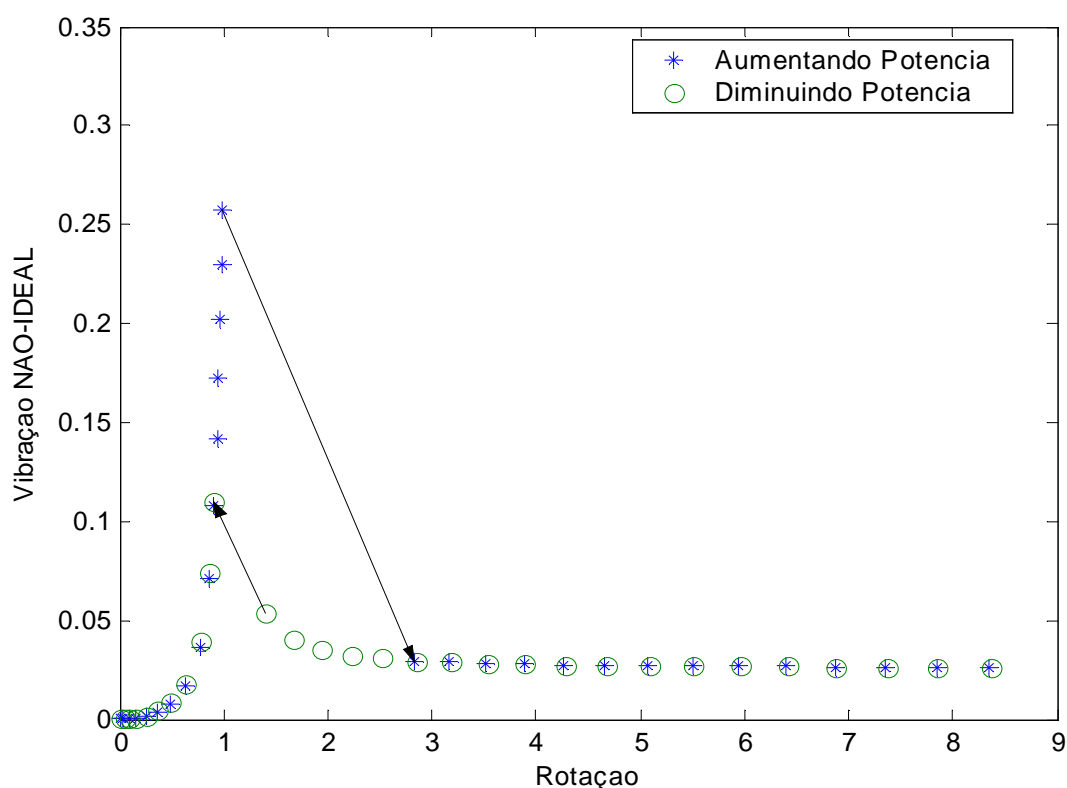


FIGURA 18 – Vibração do sistema não-ideal em função da rotação do motor.

Através da Figura 19, constatamos que o rendimento do sistema possui uma região de descontinuidade que vai de 1 a aproximadamente 3. Especificamente em 1, frequência natural do sistema, observamos que o rendimento alcança o seu valor mínimo.

Nesta região dizemos que o motor foi “capturado” pela frequência natural do sistema, o que faz com que toda a energia elétrica fornecida seja utilizada para

suprir as perdas elétricas e mecânicas do sistema e como consequência, não há potência útil disponível no eixo do motor.

À medida que a potência elétrica fornecida ao motor aumenta, a rotação também aumenta até um valor próximo a 3,0 unidades. Desta maneira, o motor é “libertado” da frequência natural do sistema. Em seguida, o rendimento volta a ter o mesmo comportamento verificado antes da “captura” do motor, isto é, passa a ser uma função contínua e crescente.

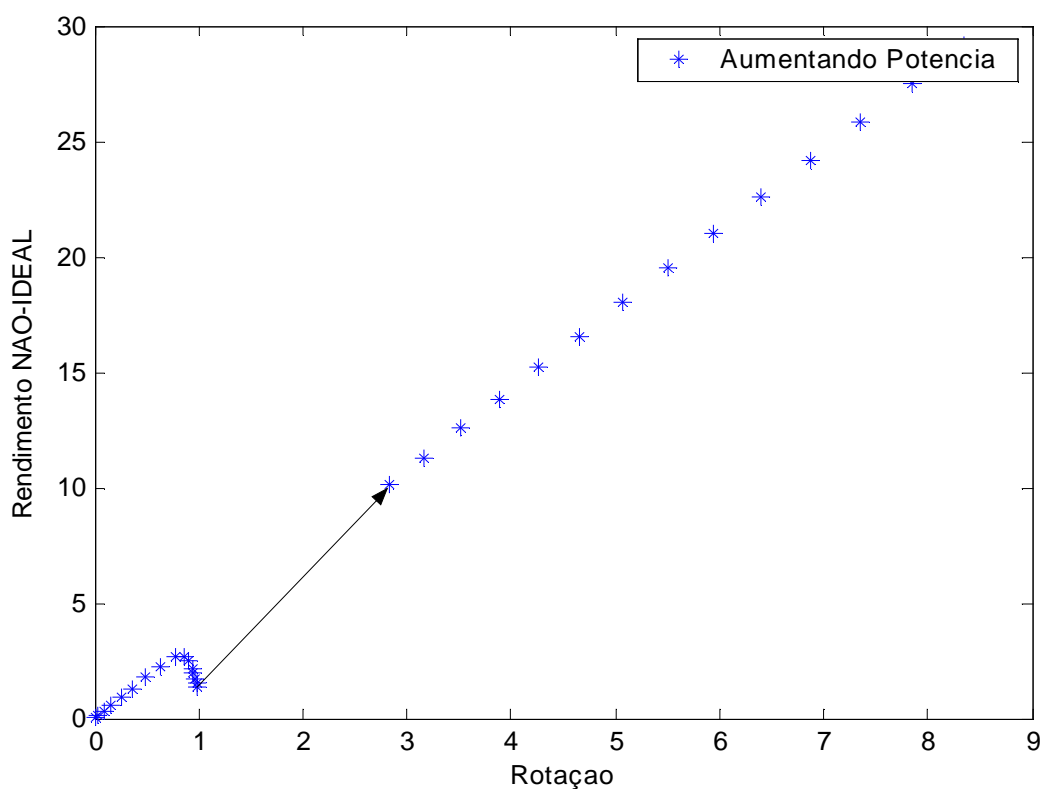


FIGURA 19 – Rendimento do sistema não-ideal em função do aumento da rotação do motor.

Para a situação em que a rotação varia no sentido decrescente, a Figura 20 mostra que o rendimento é descontínuo na faixa de rotação de 1 a 1,5. A “captura” do motor pela frequência natural do sistema se dá nesta faixa.

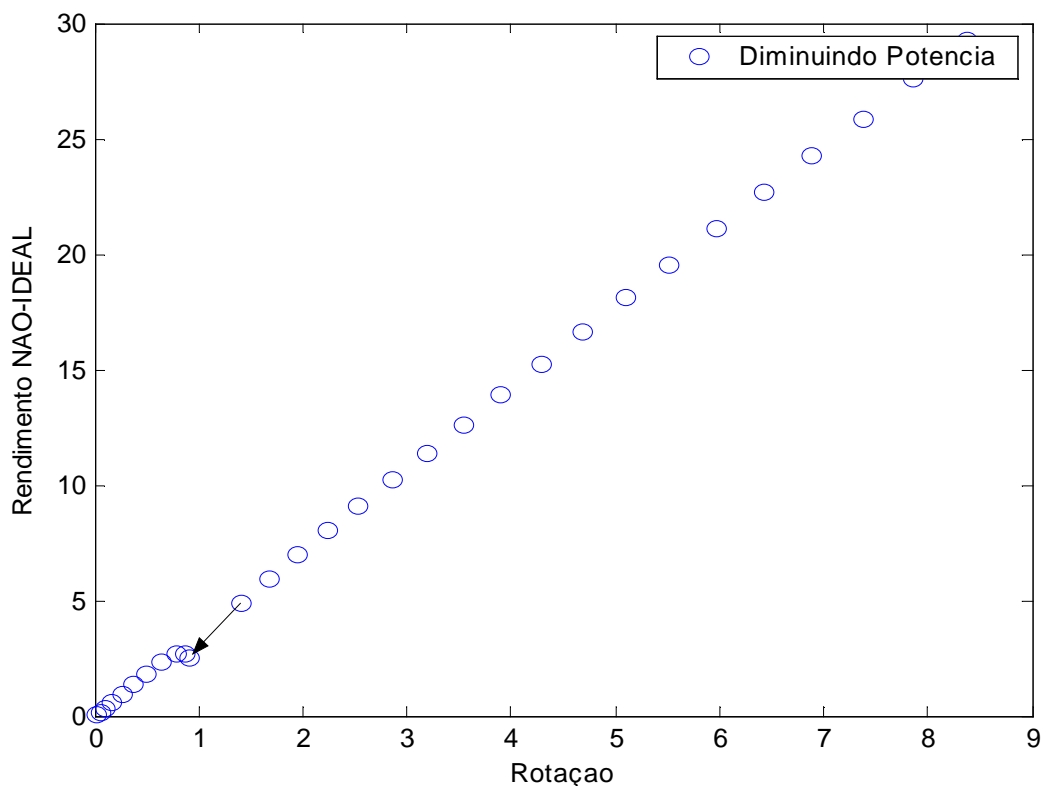


FIGURA 20 – Rendimento do sistema não-ideal em função da diminuição da rotação do motor.

Observamos na Figura 21 que o rendimento do sistema não-ideal é menor do que o seu correspondente ideal na região de “captura” do motor, alcançando o seu valor mínimo quando a frequência de rotação é igualada a frequência natural do sistema. Após o “salto”, o rendimento volta a crescer com o aumento da rotação. Em termos da rotação do motor, o comprimento do salto é 1,0 a 4,0 unidades.

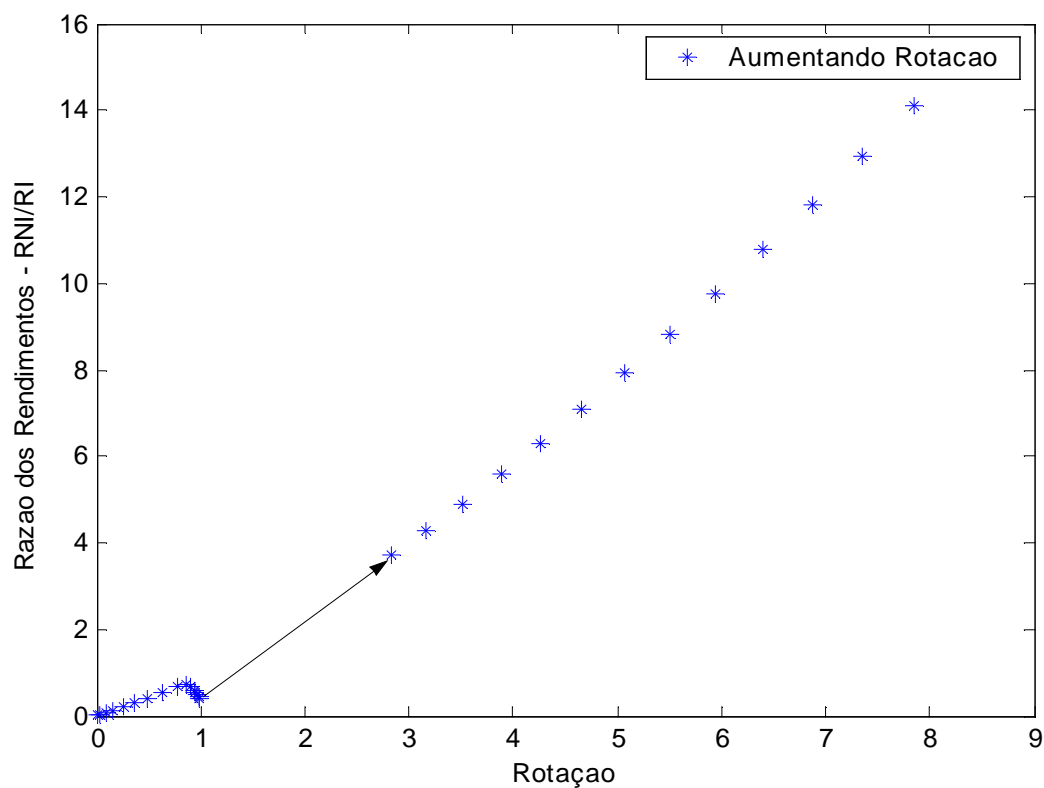


FIGURA 21 – Razão dos Rendimentos para o motor cc com excitação série aumentando a rotação.

A Figura 22 nos mostra que ao variarmos a rotação no sentido decrescente, o rendimento do sistema não-ideal é maior do que o seu correspondente ideal em toda a faixa de rotação pesquisada. A região de “captura” é praticamente imperceptível. Em termos da rotação do motor, o comprimento do salto é 1,0 a 1,5 unidades.

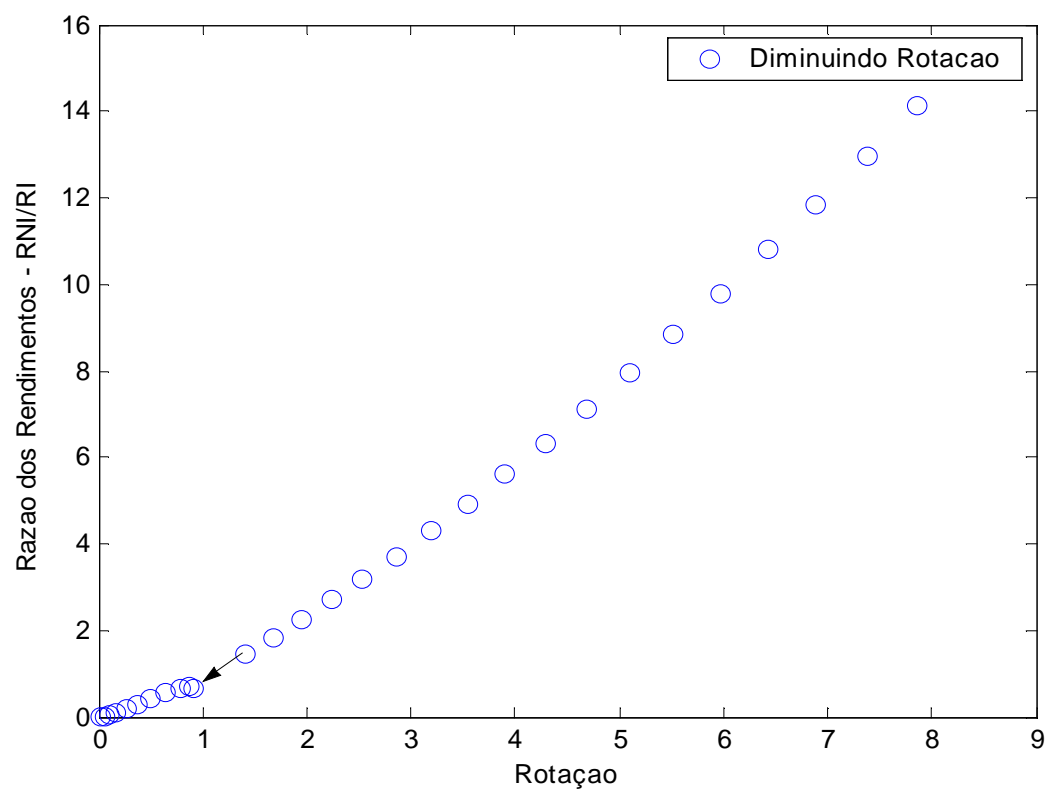


FIGURA 22 – Razão dos Rendimentos para o motor cc com excitação série diminuindo a rotação.

5 CONCLUSÃO

Considerando que o objetivo precípua deste trabalho é estudar o acoplamento da dinâmica de uma máquina elétrica rotativa, no caso um motor de corrente contínua, com a dinâmica da estrutura elástica que a suporta, podemos afirmar que este foi alcançado, como mostram os gráficos apresentados no Capítulo 4.

Kononenko [4] observou as interações que surgem entre uma máquina rotativa e sua estrutura de suporte. Nayfeh & Mook [3] utilizaram o método de escalas múltiplas para estudar o sistema da Figura 3.1, sem considerar a equação elétrica da máquina. Em nosso trabalho, estudamos as interações existentes entre um motor de corrente contínua de excitação independente e série, e a estrutura elástica que o suporta, considerando as equações elétricas do motor para os dois tipos de excitações mencionadas.

Os resultados relacionados à amplitude de vibração em função da rotação, mostram que no sistema não-ideal existe uma região de descontinuidade quando comparamos com o seu correspondente ideal [4].

Verificamos que na região de “captura”, o rendimento do motor do sistema não-ideal é menor do que o seu correspondente ideal, para uma mesma rotação. Toda energia demandada da rede elétrica é utilizada para suprir as perdas elétricas, além de provocar o aumento da vibração do sistema. O rendimento tem o seu valor mínimo alcançado em uma região próxima à frequência natural do sistema e que no caso específico do motor com excitação série, a extensão da faixa na condição de aumento da rotação é consideravelmente maior do que na condição de diminuição da rotação.

Quanto a amplitude de vibração, observamos que no sistema não-ideal existe uma região de descontinuidade quando comparamos com o seu correspondente ideal [4]. A essa descontinuidade, damos o nome de “salto” ou “efeito Sommerfeld” [4]. Seu aparecimento é provocado pelas não lineares presentes no modelo dinâmico adotado para descrever o sistema da Figura 4 como não-ideal [5]. As amplitudes de vibração para as excitações independente e série, aumentando a rotação, são

praticamente iguais. Todavia, para a situação em que a rotação diminui, a amplitude de vibração do sistema, considerando a excitação independente, é maior.

Considerando que o nosso trabalho não esgotou As sugestões para trabalhos futuros são:

- 1) Efetuar a montagem em laboratório do sistema da Figura 4 e analisar o comportamento do sistema para outros valores de parâmetros, considerando a excitação independente e série, quando a rotação do motor é variada no sentido crescente e decrescente;
- 2) Modelar e analisar um sistema similar ao da Figura 4, considerando dois ou mais motores elétricos;
- 3) Modelar e analisar um sistema não-ideal do tipo estudado neste trabalho, considerando outro tipo de máquina rotativa (elétrica e combustão interna);
- 4) Estudar a aplicação das técnicas de controle inteligente em sistemas não-ideais constituídos por máquinas rotativas suportadas por estruturas elásticas.

REFERÊNCIAS

- 1 SCHMIDT, G.; TONDL, A. **Non-linear vibrations**. Cambridge University Press: Cambridge, 1986.

- 2 HILBORN, Robert C. **Chaos and nonlinear dynamics**. Oxford: University Press, 2000.

- 3 NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear oscillations**. New York : John Wiley and Sons, 1979.

- 4 KONONENKO, V. O. **Vibrating systems with a limited power supply**. London: Iliffe Books, 1969.

- 5 EVAN-IWANOWSKI, R.M. **Resonance oscillators in mechanical systems**. London: Elsevier, 1976.

- 6 DIMENTBERG, M.F. et al. Passage through critical speed with limited power by switching system stiffness. **Nonlinear and stochastic dynamics**, [s.l.], AMD, v. 192, de v. 78, p. 57-67, 1994.

- 7 BALTHAZAR, J.M. et al. On non-ideal flexible resonance crossing: modeling and general characteristics. In: CONFERENCE ON NONLINEAR VIBRATIONS, STABILITY, AND DYNAMICS OF STRUCTURES, 6., 1996, Blacksburg. **Proceedings of the sixth conference on nonlinear vibrations, stability, and dynamics of structures**. Blacksburg: Engineering Science Department, Virginia Tech, 1996.

- 8 Balthazar, J.M. et al. On non-ideal euler-bernoulli cantilever beam supporting an unbalanced motor at this tip end. Preprint, 1996.

- 9 BALTHAZAR, J. M.; MATTOS, M. C. ; MOOK, D. T. Some remarks on the behaviour of a nonlinear nonideal problem. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON NONLINEAR DYNAMICS, CHAOS AND CONTROL, 2., 1997, São Pedro. **Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences**. São Pedro: [s.n] ,1997. v. 1, p. 97-104.

- 10 WIECZOREK, S.; MOOK, D.T. Experimental investigation of transverse vibration of a cantilevered beam excited by a non-ideal energy source. In:

PACAM -PAN-AMERICAN CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, 5., 1997, San Juan. **Applied Mechanics in the Americas**, 1997.

- 11 Balthazar, J.M. et al. Simulações numéricas de um manipulador robótico contendo elementos não lineares. **Revista robótica e automação**, Porto (Cidade), v. 26, p. 36-42,1997.

- 12 DE MATTOS, M.C. et al. An experimental study of vibrations of non-ideal systems. In: ASME DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES, 1997, Sacramento. **Proceedings design engineering technical conference**. Sacramento: ASME, 1997. 1 CD-ROM.

- 13 Balthazar, J.M. et al. A Review of new Vibration Issues due to Non-Ideal Energy Sources. In: DYNAMICS and their Controls. [s.l.]: CRC Press, 2001.

- 14 CHAPMAN, Stephen J. **Electric machinery fundamentals**. Singapore: McGraw-Hill, 1991.

- 15 MEIROVITCH, Leonard. **Elements of vibration analysis**. New York: McGraw-Hill,1975.

- 16 VEMURI, V. **Modeling of complex systems: an introduction**. New York, Academic Press, 1978.

- 17 MEREDITH, D. et al. **Design and planning of engineering systems**. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall,1985.